IL “LINGUAGGIO MATEMATICO”

Connettivi logici

$$\neg \text{ (non)}; \quad \wedge \text{ (e)}; \quad \vee \text{ (oppure)};$$

$$\Longrightarrow\text{(se...allora/...implica...)}; \quad \Longleftrightarrow\text{(...se e solo se...)}$$

Quantificatori

$$\forall \text{ (per ogni)}; \qquad \exists \ldots : \ldots \text{ (esiste...tale che...)}$$

Proposizioni

“frasi sensate che non contengono variabili libere e che sono vere oppure false”

Insiemi e sottoinsiemi

In generale gli insiemi verranno definiti con una scrittura del tipo

$$A = \{x \in \mathcal{U} : P(x)\};$$

a volte semplicemente mediante un elenco

$$A = \{a, b, c, d\}.$$

Notazioni:

$$x \in A \text{ (} x \text{ appartiene all'insieme } A\text{)}$$

$$A \subseteq B \text{ (} A \text{ è } \textit{sottoinsieme} \text{ di } B\text{)}$$

ovvero $x \in A \Longrightarrow x \in B$.

$$A = B \Longleftrightarrow (x \in A \Longleftrightarrow x \in B) \Longleftrightarrow (A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A)$$

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\} \ (\textit{unione})$$

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\} \ (\textit{intersezione})$$

$$\emptyset \text{ denota l'}\textit{insieme vuoto}$$

$$A \text{ e } B \text{ sono } \textit{disgiunti} \text{ se } A \cap B = \emptyset$$

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ e non } x \in B\}$$

$$A \subset B \Longleftrightarrow A \subseteq B \ e \ B \setminus A \neq \emptyset$$

(stretta inclusione di A in B)

Esempi:

$$A = \{x \in \mathbf{R} \ : \ x^2 - 5x + 6 = 0\}$$

$$B = \{y \in \mathbf{R} \ : \ (y-2)(y-3) = 0\}, \qquad C = \{2, 3\}$$

$$D = \{2\} \qquad E = \{2, \{2\}\} \qquad F = \{\{2\}\} \qquad G = \{2, 3, 2\}$$

$$A = B = C \supseteq D \in E, \qquad D \cap F = \emptyset \qquad D \cup F = E$$

$$A \cap E = D \qquad C \setminus D = \{3\} \qquad G = C$$

$A = \{x \in \mathbf{R} : \sin(1/x) = 0\}$ si può anche scrivere

$$\{x \in \mathbf{R} : 1/x = k\pi \text{ per qualche } k \in \mathbf{Z}\}$$

oppure $\{x \in \mathbf{R} : \exists k \in \mathbf{Z} : \ 1/x = k\pi\}$ oppure

$$\{x \in \mathbf{R} : \exists k \in \mathbf{Z}, \ k \neq 0, \ x = 1/k\pi\}$$

oppure

$$\left\{\frac{1}{\pi}, -\frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, -\frac{1}{2\pi}, \ldots\right\}$$

$$A = \Big\{Im(z) \ : \ z^3 = -8i\Big\}$$

$$= \Big\{x \in \mathbf{R} \ : \ \exists z \in \mathbf{C}, \ x = Im(z), \ z^3 = -8i\Big\} = \{-1, 2\}$$

INSIEMI PRODOTTO

Se A e B sono insiemi, il *prodotto* $A \times B$ è definito da

$$A \times B = \{(a, b) \ : \ a \in A, \ b \in B\}$$

Gli oggetti del tipo (a, b) vengono detti *coppie* (o “coppie ordinate”), ed hanno la proprietà che

$$(a, b) = (a', b') \Longleftrightarrow (a = a' \ e \ b = b')$$

(a differenza dell’*insieme* $\{a, b\} = \{b, a\}$)
Possibile definizione: $(a, b) = \{a, \{a, b\}\}$.

Scriveremo $A \times A = A^2$. È ben noto l’insieme $\mathbf{R}^2$, che si identifica con il “piano Cartesiano”

$\square$

INSIEMI NUMERICI E LORO STRUTTURA

N insieme dei numeri *naturali* o interi positivi

ovvero $0, 1, 2, 3, \ldots$

Z insieme dei numeri *interi*

ovvero $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$

Q insieme dei numeri *razionali*

ovvero le frazioni m/n dove $m, n \in \mathbf{Z}$ e $n \neq 0$.

R insieme dei numeri *reali*

quali per esempio π, $\sqrt{2}$, e (numero di Nepero),…

C insieme dei numeri *complessi*

ovvero numeri della forma $z = a + ib$, con $a, b \in \mathbf{R}$ e $i^2 = -1$.

Abbiamo le inclusioni

$$\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R} \subseteq \mathbf{C}$$

Altri insiemi: $\mathbf{N}^+$, $\mathbf{Q}^+$, $\mathbf{R}^+$ (interi *strettamente* positivi, etc).

$\square$

La completezza di R

Def. Sia $A \subseteq \mathbf{R}$. Si dice che M è un *maggiorante* per A se

$$\forall a \in A \qquad a \leq M.$$

Si dice che M è un *minorante* per A se

$$\forall a \in A \qquad a \geq M.$$

Esempio 1): $A = \{x \in \mathbf{Q} \ : \ -1 \leq x < 1\}$.
I punti 1, 2, 100 sono maggioranti di A.
I punti -1, -3, $-7/5$ sono minoranti di A.
Il punto 0 non è ne' maggiorante ($0 < \frac{1}{2} \in A$) ne' minorante ($0 > -1 \in A$) di A.

In questo caso l'insieme dei maggioranti di A è $\{x \in \mathbf{R} \ : \ x \geq 1\}$; l'insieme dei minoranti di A è $\{x \in \mathbf{R} \ : \ x \leq -1\}$.

Esempio 2): $A = \{x \in \mathbf{Q} \ : \ x^2 - 2 \leq 0\}$. In questo caso l'insieme dei maggioranti di A è $\{x \in \mathbf{R} \ : \ x \geq \sqrt{2}\}$.

Esempio 3): $A = \{x \in \mathbf{R} \ : \ x^2 - 2 \leq 0\}$. L'insieme dei maggioranti di A è ancora $\{x \in \mathbf{R} \ : \ x \geq \sqrt{2}\}$.

Esempio 4): $K = \mathbf{R}$, $A = \{x \in \mathbf{R} \ : \ x \leq \pi\}$. In questo caso l'insieme dei maggioranti di A è $\{x \in \mathbf{R} \ : \ x \geq \pi\}$, L'insieme dei minoranti è $\emptyset$.

Esempio 5): $A = \emptyset$. Allora ogni elemento di $\mathbf{R}$ è sia maggiorante che minorante per A.

Esempio 6): $A = \mathbf{N}$. Non esistono maggioranti. L'insieme dei minoranti è $\{x \in \mathbf{R} \ : \ x \leq 0\}$.

$\square$

Def. Sia $A \subseteq \mathbf{R}$ e $M \in \mathbf{R}$. Si chiama *massimo* di A un maggiorante M di A tale che $M \in A$. Si chiama *minimo* di A un minorante M di A tale che $M \in A$.

Il massimo di A viene denotato con $\max A$; il minimo di A viene denotato con $\min A$.

Nell'esempio 1: A ha minimo $= -1$, ma non ha massimo.

Negli esempi 2 e 5: A non ha ne' minimo ne' massimo.

Nell'esempio 3: si ha $\min A = -\sqrt{2}$, $\max A = \sqrt{2}$.

Nell'esempio 4: $\max A = \pi$, $\min A$ non esiste.

Nell'esempio 6: $\min A = \min \mathbf{N} = 0$, $\max A$ non esiste.

Teorema. Massimo e minimo di A sono unici.

Dim. (basta provarlo per il minimo) Supponiamo M' e M'' due minimi di A. Allora

$$M' \in A \qquad M' \leq a \quad \forall a \in A \tag{1}$$

$$M'' \in A \qquad M'' \leq a \quad \forall a \in A. \tag{2}$$

Abbiamo allora $M' \leq M''$ e $M'' \leq M'$. Dunque $M'' = M'$. $\square$

Def. Diremo che A è un sottoinsieme *superiormente limitato* di $\mathbf{R}$ quando esiste almeno un maggiorante di A:

$$\exists\ M \in \mathbf{R}\ :\ \forall a \in A \quad a \leq M.$$

Diremo che A è un sottoinsieme *inferiormente limitato* di $\mathbf{R}$ quando esiste almeno un minorante di A:

$$\exists\ M \in \mathbf{R}\ :\ \forall a \in A \quad a \geq M.$$

Diremo che A è un sottoinsieme *limitato* di $\mathbf{R}$ quando è sia superiormente limitato che inferiormente limitato.

OSSERVAZIONI: 1) A è un sottoinsieme limitato di $\mathbf{R}$ se e solo se

$$\exists\ M \in \mathbf{R}\ :\ \forall a \in A \quad |a| \leq M.$$

2) A non è superiormente limitato se e solo se

$$\forall\ M \in \mathbf{R} \quad \exists a \in A\ :\ a \geq M.$$

Def. Sia $A \subseteq \mathbf{R}$. Definiamo l'*estremo superiore* di A in $\mathbf{R}$ (che denoteremo con $\sup A$) il minimo dei maggioranti di A. Definiamo l'*estremo inferiore* di A in $\mathbf{R}$ (che denoteremo con $\inf A$) il massimo dei minoranti di A.

OSSERVAZIONE: sup A e inf A, se esistono, sono unici (per l'unicità di minimo e massimo).

Nell'esempio 1: si ha $\sup A = 1$, $\inf A = -1$.

Nell'esempio 2: $\sup A = \sqrt{2}$, $\inf A = -\sqrt{2}$, ma non esistono sup A e inf A in $\mathbf{Q}$.

Nell'esempio 3: $\sup A = \sqrt{2}$, $\inf A = -\sqrt{2}$.

Nell'esempio 4: $\sup A = \pi$, ma non esiste $\inf A$.

Nell'esempio 5: $A = \emptyset$ non ha ne' sup ne' inf in $\mathbf{R}$.

Nell'esempio 6: $\inf \mathbf{N} = 0$, ma non esiste $\sup \mathbf{N}$.

$\square$

Teorema. *Sia $A \subseteq \mathbf{R}$. Allora:*

i) se $\exists \max A$ allora A è sup. lim. e $\sup A = \max A$;

ii) se $\exists \min A$ allora A è inf. lim. e $\inf A = \min A$;

iii) se $\exists \sup A$ allora ($\exists \max A \Longleftrightarrow \sup A \in A$);

iv) se $\exists \inf A$ allora ($\exists \min A \Longleftrightarrow \inf A \in A$).

Dim. i) $M = \max A \Longrightarrow M$ è maggiorante di $A \Longrightarrow A$ è sup. lim. Se M' è maggiorante di A allora in particolare $M' \geq M$ e quindi M è il min dei maggioranti di A.

ii) si dimostra alla stessa maniera di i).

iv) supponiamo $\exists \inf A$. Se $\exists \min A$ allora per ii) $\inf A = \min A \in A$. Se $M = \inf A \in A$, per definizione $M \leq a \ \forall a \in A$ e quindi verifica la definizione di $\min A$.

iii) si dimostra come iv). $\square$

Teorema. **R** è completo, *ovvero ogni suo sottoinsieme non vuoto superiormente limitato ammette estremo superiore in* $\mathbf{R}$.

Non dimostreremo questo teorema. Notiamo solo che $\mathbf{Q}$ non è completo (esempio 2 sopra).

NOTA: $\emptyset \neq A \subseteq \mathbf{R}$ ed A inf. lim. Allora $\exists \inf A$.

Dim. Definiamo $A' = \{x \in K : -x \in A\}$. A' è sup. lim. Quindi $\exists \sup A'$. Allora $-\sup A' = \inf A$. $\square$

Esempi

1. Troviamo, se esistono, sup/inf, max/min dell'insieme

$$A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}, n > 0 \right\}.$$

A è composto dai numeri

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4}, \ldots .$$

Vediamo subito che $1 \in A$ e $\frac{1}{n} \leq 1$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, $n > 0$. Questa è la definizione che ci dice che $\max A = 1$ (e quindi anche $\sup A = 1$).

Per quanto riguarda il minimo e l'estremo inferiore, vediamo che per 'n grande' i numeri $1/n$ sono 'piccoli'. Questo ci suggerisce che 0 sia l'estremo inferiore. Questo è dimostrato se

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists a \in A\ :\ a < \varepsilon$$

ovvero

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbf{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Se cio' non fosse esisterebbe $\varepsilon > 0$ tale che

$$n < \frac{1}{\varepsilon}\ \forall n \in \mathbf{N},$$

ovvero $\mathbf{N}$ sarebbe superiormente limitato (cosa che non è).

Chiaramente 0 non appartiene all'insieme A e quindi A non ammette minimo.

2. Troviamo, se esistono, sup/inf, max/min dell'insieme

$$A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n+3} : n \in \mathbf{N} \right\}.$$

Notiamo che $(-1)^n = 1$ se n è pari e $(-1)^n = -1$ se n è dispari. A è composto dai numeri

$$\frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ -\frac{1}{6},\ \frac{1}{7},\ -\frac{1}{8},\ldots .$$

Quindi A si può scrivere come $B \cup C$, dove

$$B = \left\{\frac{1}{3}\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{7},\ldots\right\}$$

e

$$C = \left\{-\frac{1}{4}\ -\frac{1}{6},\ -\frac{1}{8},\ldots\right\}$$

Come nell'esempio precedente si vede che $\max B = 1/3$ e $\min C = -1/4$. È facile vedere che $\max A = \max B = 1/3$ e $\min A = \min C = -1/4$. Infatti, per esempio, $\sup A = \sup(B \cup C) = \sup B$, dato che gli elementi di C sono tutti negativi.

3. Troviamo, se esistono, sup/inf, max/min dell'insieme

$$A = \left\{\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right) : n \in \mathbf{N}\right\}.$$

In questo caso (notiamo che, sfruttando la periodicità di $\sin x$ basta calcolare solo i primi 6 valori)

$$A = \left\{\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right) : n = 1,\ldots,6\right\} = \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

In questo caso, banalmente

$$\max A = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \min A = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Le proprietà dei numeri naturali

Abbiamo usato alcune proprietà dei numeri naturali che conviene mettere in evidenza. Per prima cosa notiamo che $\mathbf{N}$ gode delle due proprietà

(i) $0 \in \mathbf{N}$;

(ii) se $n \in \mathbf{N}$ allora $n+1 \in \mathbf{N}$. (Questa proprietà si esprime dicendo che $\mathbf{N}$ è *induttivo*).

Queste due proprietà non sono caratteristica esclusiva di $\mathbf{N}$ (anche $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ ce l'hanno), ma $\mathbf{N}$ *è il più piccolo insieme che soddisfa a queste due proprietà*, ovvero $\mathbf{N}$ *è il più piccolo insieme induttivo che contiene lo* 0.

Come conseguenza abbiamo che *i numeri naturali non costituiscono un insieme superiormente limitato di* $\mathbf{R}$.

Equivalentemente: $\forall x \in \mathbf{R}\ \exists n \in \mathbf{N}\ :\ n > x$.

Dim. (Per assurdo) Se $\mathbf{N}$ è superiormente limitato $\Longrightarrow \exists \sup \mathbf{N} = M$. Allora $M-1 < \sup \mathbf{N} \Longrightarrow \exists n \in \mathbf{N} :\ n > M-1$ (per definizione di sup) $\Longrightarrow M < n+1 \in \mathbf{N}$ ($\mathbf{N}$ è induttivo). Assurdo. □

□

Teorema (Principio di Induzione). *Per ogni* $n \in \mathbf{N}$ *sia* p_n *una proposizione. Supponiamo che valgano:*

i) $\forall n \in \mathbf{N}\ \ p_n \Longrightarrow p_{n+1}$

ii) p_0 *è vera.*

Allora $\forall n \in \mathbf{N}\ p_n$ *è vera.*

Dim. Consideriamo $A = \{n \in \mathbf{N} : p_n \text{ è vera}\}$.
i) $\Longrightarrow A$ è induttivo. ii) $\Longrightarrow 0 \in A$. Quindi $\mathbf{N} \subseteq A$. Dato che $A \subseteq \mathbf{N}$ si ha $\mathbf{N} = A$. □

ESEMPI: 1) p_n = "$2^n > n$". Verifichiamo i): $2^0 = 1 > 0$ (vera). Verifichiamo ii): $2^n > n \Longrightarrow 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n = 2^n + 2^n > 2^n + n \geq n+1$. Abbiamo quindi dimostrato che $\forall n \in \mathbf{N}\ 2^n > n$.

2) ("definizione per induzione") Se $a \in \mathbf{R}, a \neq 0$ si definisce: $a^0 = 1$, $a^{n+1} = a \cdot a^n$. (Questa è una scrittura rigorosa per "$a^n = a \cdot a \cdots a\ \ n$-volte")

2bis) Il *fattoriale di* n (o n *fattoriale*):

$$0! = 1, \qquad \forall n \in \mathbf{N}\ (n+1)! = (n+1) \cdot n!$$

ovvero (p.es. se $n \geq 3$): $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$. Quindi: $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$,...

VARIANTI: 1) Se p_n è definita per $n = k, k+1, \ldots$ ($k \in \mathbf{Z}$ fissato; p.es. $k = -2$), e sostituiamo a ii) l'ipotesi "p_k è vera" allora la tesi diventa: "p_n è vera $\forall n \in \mathbf{Z}\ n \geq k$".

2) Al posto di i) si può sostituire l'ipotesi
"$\forall n \in \mathbf{N}(p_0 \vee p_1 \ldots \vee p_n) \Longrightarrow p_{n+1}$",
oppure: "$\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}\ p_{n-1} \Longrightarrow p_n$"

SUCCESSIONI

Def. Una funzione il cui dominio è $\mathbf{N}$ o un sottoinsieme di $\mathbf{N}$ si dice una *successione*. Se il codominio è $\mathbf{R}$ allora si dice che la successione è *reale*.

NOTAZIONE: si usa in generale la notazione $n \mapsto a_n$ in luogo di $n \mapsto f(n)$, e la successione si denota con $\{a_n\}$.

NOTAZIONE: si possono avere anche successioni definite su sottoinsiemi di numeri interi, cambiando un po' le definizioni. È chiaro che nulla cambia in sostanza se la successione, invece che su $\mathbf{N}$, è per esempio definita su $\{n \in \mathbf{Z} : n \geq -3\}$, ecc.

SUCCESSIONI MONOTONE

Def. $\{a_n\}$ successione (reale) *(monotona) non decrescente* $\Longleftrightarrow$ $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall$ n;
$\{a_n\}$ successione *(monotona) non crescente* $\Longleftrightarrow$ $a_n \geq a_{n+1}$ $\forall$ n;

$\{a_n\}$ successione (reale) *(monotona) strettamente crescente* $\Longleftrightarrow$ $a_n < a_{n+1}$ $\forall$ n;
$\{a_n\}$ successione *(monotona) strettamente decrescente* $\Longleftrightarrow$ $a_n > a_{n+1}$ $\forall$ n;

NOTA: $\{a_n\}$ è successione (reale) *non decrescente* $\Longleftrightarrow$ $a_n \leq a_m$ $\forall$ n, m con $n \leq m$. Infatti se $n \leq m$ allora

$$a_n \leq a_{n+1} \leq a_{n+2} \leq \cdots \leq a_{m-1} \leq a_m$$

$\{a_n\}$ è successione (reale) *non crescente* $\Longleftrightarrow$ $a_n \geq a_m$ $\forall$ n, m con $n \leq m$, e analogamente per le altre definizioni

NOTA: $\{a_n\}$ non decrescente $\Longrightarrow$ $a_n \geq a_0$ $\forall$ n $\Longrightarrow$ $\{a_n\}$ inferiormente limitata
(analogamente $\{a_n\}$ non crescente $\Longrightarrow$ $\{a_n\}$ superiormente limitata).

NOTA (relativa al calcolo di inf/sup, max/min):

(1) se $\{a_n\}$ è una successione non crescente allora esiste il $\max\{a_k : k \in \mathbf{N}\} = a_0$, e se $\{a_n\}$ è una successione non decrescente allora esiste il $\min\{a_k : k \in \mathbf{N}\} = a_0$. Per brevità scriveremo d'ora in poi $\max\{a_k\}$ in luogo di $\max\{a_k : k \in \mathbf{N}\}$ e così via;

(2) se $\{a_n\}$ è una successione non crescente allora esiste il $\min\{a_n\} = M$ se e solo se esiste un numero naturale n tale che $M = a_m$ per ogni $m \geq n$. Infatti da quello che abbiamo appena notato si ha $a_m \leq a_n$ se $m \geq n$, quindi se n è tale che $a_n = M$

(il minimo) allora si ha $a_m \leq M$ se $m \geq n$, quindi si deve avere $a_m = M$, altrimenti la definizione di minimo non è soddisfatta.

Analogamente, se $\{a_n\}$ è una successione non decrescente allora esiste il $\max\{a_n\} = M$ se e solo se esiste un numero naturale n tale che $M = a_m$ per ogni $m \geq n$.

(3) dall'osservazione precedente si ha che se $\{a_n\}$ è una successione strettamente crescente allora non ha massimo e se $\{a_n\}$ è una successione strettamente decrescente allora non ha minimo.

Esempio. La successione $a_n = \frac{1}{n}$ è strettamente decrescente, quindi $\max\{a_n\} = a_1 = 1$ (in questo caso a_0 non è definita e quindi partiamo da 1) e non esiste $\min\{a_n\}$. Abbiamo già visto che $\inf\{a_n\} = 0$.

Def. *Costante di Nepero:*

$$e = \sup\Big\{ \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n \ : \ n \in \mathbf{N} \setminus \{0\} \Big\}.$$

Stima: $2.71 < e < 2.72$.

Questa è una buona definizione perchè si può dimostrare che la successione

$$a_n = \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n$$

è superiormente limitata. Inoltre si può vedere che è strettamente crescente, quindi e non è in massimo di tali valori.

Def. I *coefficienti binomiali* si definiscono per $n, k \in \mathbf{N}$ come

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!\ (n-k)!} & \text{se } 0 \le k \le n \\ 0 & \text{se } k > n. \end{cases}$$

In particolare $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$ e $\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n$. In generale

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Def. Il simbolo di *somma* (o *sommatoria*): data una successione $\{a_n\}$ definiamo:

$$\sum_{k=0}^{0} a_k = a_0, \qquad \sum_{k=0}^{n+1} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k + a_{n+1}.$$

La def. di $\sum_{k=0}^{n} a_k$ è una precisazione rigorosa di

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n.$$

IMPORTANTE: i) L'indice k è *muto*: ovvero non importa se gli si cambia di nome:

$$\sum_{j=0}^{n} a_j = \sum_{k=0}^{n} a_k \ (= a_0 + a_1 + \ldots + a_n);$$

ii) Se si hanno solo un numero finito di termini $a_0, \ldots, a_m$ le definizoni si adattano per $n \le m$;
iii) Si definisce analogamente il simbolo

$$\sum_{k=m}^{n} a_k \ (= a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n);$$

iv) Valgono le proprietà ($m \le q \le n$)

$$\sum_{k=0}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k\,; \qquad \sum_{k=0}^{n} c\,a_k = c\sum_{k=0}^{n} a_k\,;$$

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m+p}^{n+p} a_{k-p} = \sum_{k=p-n}^{p-m} a_{p-j}\,;$$

$$\sum_{k=0}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_0; \; \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{q} a_k + \sum_{k=q+1}^{n} a_k.$$

Esempio. Sia $a > 0$. Allora definiamo la successione

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a^k = 1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1} + a^n,$$

ovvero ottenuta come sopra con $a_k = a^k$.

Notiamo che se $a = 1$ allora $s_n = n + 1$, mentre se $a \neq 1$ si ha

$$s_n = \frac{(1-a)}{(1-a)} \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1}{1-a}\Big(\sum_{k=0}^{n} a^k - \sum_{k=0}^{n} a^{k+1}\Big)$$

$$= \frac{1}{1-a}\Big(\sum_{k=0}^{n} a^k - \sum_{k=1}^{n+1} a^k\Big) = \frac{1 - a^{n+1}}{1-a}.$$

La Formula del Binomio di Newton

Per ogni $a, b \in \mathbf{R}$ (convenendo in questa scrittura che $0^0 = 1$) si ha

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

ovvero (in termini più "imprecisi"):

$$
\begin{aligned}
(a+b)^n = \binom{n}{0} a^{n-0} b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \dots \\
\dots + \binom{n}{n-1} a^{n-(n-1)} b^{n-1} + \binom{n}{n} a^{n-n} b^n \\
= a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{n-1} a\, b^{n-1} + b^n.
\end{aligned}
$$

ALTRA SCRITTURA: $\forall x \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$

$$
(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.
$$

Dim. 1) $\forall n, k \in \mathbf{N}$ si ha

$$
\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.
$$

(si prova per induzione su k). Basta verificare che

$$
\begin{aligned}
&\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!} \\
&= \frac{n!\,(k+1)}{k!\,(k+1)\,(n-k)!} + \frac{n!\,(n-k)}{(k+1)!\,(n-k-1)!\,(n-k)} \\
&= \frac{n!\,\big((k+1)+(n-k)\big)}{(k+1)!\,(n-k)!} = \frac{n!\,(n+1)}{(k+1)!\,(n-k)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,((n+1)-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1}
\end{aligned}
$$

2) Proviamo la formula nella seconda forma: $\forall n \in \mathbf{N}$

$$(p_n) \qquad (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

p_0 è vera:

$$1 = (1+x)^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} x^k = \binom{0}{0} x^0 = 1 \cdot x^0 = 1.$$

Se p_n è vera, allora

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x) \cdot (1+x)^n = (1+x) \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^k + x^{n+1} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) x^k + x^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0} x^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^k + \binom{n+1}{n+1} x^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k
\end{aligned}$$

ovvero p_{n+1} è vera. $\square$

NOTA: dalla formula provata si ottiene subito la formula “prima versione”: se $a \neq 0$ si scrive $(a+b)^n = a^n \cdot (1+\frac{b}{a})^n$.

$\square$

Estremi di funzioni

Sia $f : X \to \mathbf{R}$. Per i massimi/minimi, sup/inf dell'insieme

$$\{y \in \mathbf{R} : \exists x \in X : y = f(x)\} = \{f(x) : x \in X\}$$

(l'*immagine* di f) si adotta una nomenclatura particolare.

Il $\max\{f(x) : x \in X\}$ (se esiste) viene chiamato il *massimo di* f (su X) e il $\sup\{f(x) : x \in X\}$ (se esiste) viene detto l'*estremo superiore di* f (su X). Questi numeri vengono denotati con

$$\max_X f, \qquad \sup_X f,$$

rispettivamente (si può omettere X se è chiaro dal contesto).
NOTA:

(1) $M \in \mathbf{R}$ è un maggiorante per $\{f(x) : x \in X\}$ se

$$f(x) \leq M \ \forall x \in X.$$

In tal caso si dice che f è *limitata superiormente*.

(2) esiste il $\max_X f$ se e solo se

$$\text{esiste } x \in X \text{ tale che } f(x) \geq f(y) \ \forall y \in X$$

In tal caso $f(x) = \max_X f$.
NOTA: le definizioni sopra si possono tradurre come proprietà del grafico di f; M è maggiorante se e solo se il grafico di f sta tutto al di sotto della retta orizzontale $y = M$, e $y = \sup_X f$ è la più

bassa di queste rette. In questo modo, se sono note proprietà del grafico di f, si semplica il calcolo di max e sup.

Ovviamente, vengono date in modo analogo anche le definizioni di *minimo* ed *estremo inferiore* di una funzione.

Esempi. (si risolvono subito esaminando il grafico di funzioni note)

1. $f(x) = \arctan x$, $X = \mathbf{R}$. Allora

$$\sup\ \arctan = \frac{\pi}{2}, \qquad \inf\ \arctan = -\frac{\pi}{2},$$

e non esistono max e min.

2. $f(x) = \sin x$.
Se $X = \mathbf{R}$ allora $\max \sin = 1$, $\min \sin = -1$.
Se $X = \{0 \leq x < \pi\}$ allora $\max \sin = 1$, $\min \sin = 0$.

3. $f(x) = x^2 - 2$.
Se $X = \mathbf{R}$ allora $\min f = -2$ e non esiste $\sup f$
Se $X = \{1 \leq x \leq 2\}$ allora $\min f = -1$ e $\max f = 2$
Se $X = \{-1 \leq x \leq 2\}$ allora $\min f = -2$ e $\max f = 2$

4. $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$ (ci si riconduce al grafico di $1/x$ scrivendo $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x+2}$) e $X = \{x \in \mathbf{R} : x \geq 1\}$. Allora $\min f = 3/2$, $\sup f = 1$ ma non esiste il $\max f$.

Foglio di esercizi (con traccia delle soluzioni) - 5 ottobre 2002

1. Calcolare (se esistono) max, min, inf, sup di

$$f(x) = 2 - \frac{|x-1|}{4}.$$

Bisogna esaminare l'insieme

$$A = \{2 - \frac{|x-1|}{4} : x \in \mathbf{R}\} = \{2 - \frac{|y|}{4} : y \in \mathbf{R}\} = \{2 - z : z \geq 0\} = (-\infty, 2].$$

Dunque $\max f = 2 = f(1)$ mentre $\inf f = -\infty$ (e non esiste il $\min f$).

2. Calcolare (se esistono) max, min, inf, sup dell'insieme

$$\{|x| : (x-2)(x+1) < 0\}.$$

Il dominio della funzione in questione è $\{x \in \mathbf{R} : (x-2)(x+1) < 0\} = (-1, 2)$. Si ha

$$\{|x| : x \in (-1, 2)\} = [0, 2).$$

Dunque il minimo dell'insieme è 0, non esiste il massimo e il sup è 2.

3. Calcolare (se esistono) max, min, inf, sup dell'insieme

$$\{\sqrt{|x|} : (x-1)(x+4) < 0\}.$$

Il dominio della funzione in questione è $\{x \in \mathbf{R} : (x-1)(x+4) < 0\} = (-4, 1)$. Si ha

$$\{\sqrt{|x|} : x \in (-4, 1)\} = [0, 2).$$

Dunque il minimo dell'insieme è 0, non esiste il massimo e il sup è 2.

4. Calcolare (se esiste)

$$\min\Big\{\sin\Big(\frac{\pi}{1+3|x|}\Big) : x \in \mathbf{R}\Big\}.$$

Dobbiamo esaminare l'insieme

$$A = \{\sin y : y \in Y\},$$

dove

$$Y = \Big\{y = \Big(\frac{\pi}{1+3|x|}\Big) : x \in \mathbf{R}\Big\} = \Big\{y = \Big(\frac{\pi}{1+3z}\Big) : z \geq 0\Big\} = (0, \pi].$$

Dunque
$$A = \{\sin y : 0 < y \leq \pi\} = [0, 1]$$
e il $\min A$ è 0 (ottenuto per $x = 0$).

5. Calcolare (se esiste)
$$\sup\Big\{\log\Big|\frac{1+3x}{1-13x}\Big| : x > \frac{1}{13}\Big\}.$$

Dobbiamo esaminare l'insieme
$$A = \{\log y : y \in Y\}$$
dove
$$Y = \Big\{y = \Big|\frac{1+3x}{1-13x}\Big| : x > \frac{1}{13}\Big\} = \Big\{y = \frac{1+3x}{13x-1} : 13x - 1 > 0\Big\} = \Big(\frac{3}{13}, +\infty\Big).$$
Dunque $\sup = +\infty$ (mentre $\inf A = \log(3/13) = \log 3 - \log 13$).

6. Calcolare (se esiste)
$$\sup\Big\{3^x : x < \frac{1}{\log 3}\Big\}.$$

La funzione 3^x è strettamente crescente, quindi
$$\Big\{3^x : x < \frac{1}{\log 3}\Big\} = (0, 3^{1/\log 3}) = (0, e).$$
Quindi il sup è e.

7. Calcolare (se esiste)
$$\inf\Big\{\log\Big(7 + \Big|\frac{5}{x} + 3\Big|\Big) : x > 0\Big\}.$$

Dato che $\frac{5}{x} + 3 > 0$ per $x > 0$, dobbiamo calcolare
$$\begin{aligned}\inf\Big\{\log\Big(7 + \frac{5}{x} + 3\Big) : x > 0\Big\} &= \inf\Big\{\log\Big(10 + \frac{5}{x}\Big) : x > 0\Big\}\\ &= \inf\Big\{\log\Big(10 + y\Big) : y > 0\Big\} = \inf(\log 10, +\infty) = \log 10.\end{aligned}$$

8. Calcolare (se esiste)
$$\inf\Big\{\log\Big(7 + \Big|\frac{3}{x} - x^2\Big|\Big) : x > 0\Big\}.$$

Notiamo che il minimo della funzione
$$f(x) = \Big|\frac{3}{x} - x^2\Big|$$
per $x > 0$ è 0 (ottenuto per $x = 3^{1/3}$), quindi il minimo di
$$\log\Big(7 + \Big|\frac{3}{x} - x^2\Big|\Big)$$
è $\log 7$.

La retta estesa

I simboli $+\infty$ e $-\infty$: si estende la relazione d'ordine $\leq$ ponendo

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad -\infty \leq x \leq +\infty$$

Def. *retta reale estesa* $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

Osservazione: $\forall A \subseteq \overline{\mathbf{R}}$ $+\infty$ è maggiorante di A (e $-\infty$ è minorante di A).

Teorema. $\forall A \subseteq \mathbf{R}$ $\exists \sup A, \inf A \in \overline{\mathbf{R}}$. Se $A \subseteq \mathbf{R}$, allora

i) $\sup A = +\infty \Longleftrightarrow A$ non è sup. lim.;

ii) $\inf A = -\infty \Longleftrightarrow A$ non è inf. lim.;

iii) $\sup \emptyset = -\infty$, $\inf \emptyset = +\infty$.

Dim. (per il sup) $A \neq \emptyset$. Se $+\infty \in A$, allora $+\infty = \sup A = \max A$. Escludendo il caso $A = \{-\infty\}$, resta da considerare il caso $A \subseteq \mathbf{R}$.

i) A sup. lim. $\Longrightarrow \exists \sup A \in \mathbf{R} \Longrightarrow \exists \sup A \in \overline{\mathbf{R}}$; A non sup. lim. $\Longleftrightarrow$ maggioranti $= \{+\infty\} \Longleftrightarrow \sup A = +\infty$;

ii) stesso ragionamento;

iii) $A = \emptyset \Longrightarrow$ maggioranti $= \overline{\mathbf{R}} \Longrightarrow \sup \emptyset = -\infty$ e $\inf \emptyset = +\infty$ $\square$

Esempi. $\sup \mathbf{N} = +\infty$; $\max \overline{\mathbf{R}} = +\infty$

Analogamente, per gli estremi superiore/inferiore di funzioni, $\sup e^x = +\infty$, $\inf x^3 = -\infty$, ecc.

Intervalli di $\overline{\mathbf{R}}$

Def. $I \subseteq \overline{\mathbf{R}}$ è *intervallo* $\iff (\forall x, y \in I\ x < z < y \implies z \in I)$

Nomenclatura: $(a, b \in \overline{\mathbf{R}}\ \ a \leq b)$

$$[a,b] = \{x \in \overline{\mathbf{R}} : a \leq x \leq b\},$$
$$]a,b] = \{x \in \overline{\mathbf{R}} : a < x \leq b\},$$
$$[a,b[= \{x \in \overline{\mathbf{R}} : a \leq x < b\},$$
$$]a,b[= \{x \in \overline{\mathbf{R}} : a < x < b\}.$$

Si usa anche la notazione (a,b) per $]a,b[$, $(a,b]$ per $]a,b]$, etc.

a e b vengono detti *estremi* dell'intervallo.

Si dice che l'intervallo I è chiuso in a (o in b) se $a \in I$ (rispettivamente, $b \in I$). Si dice che l'intervallo I è aperto in a (o in b) se $a \notin I$ (rispettivamente, $b \notin I$).

Esempi: 1) $[0,1] = \{x \in \overline{\mathbf{R}} :\ 0 \leq x \leq 1\} = \{x \in \mathbf{R} :\ 0 \leq x \leq 1\}$;

2) $[0,0] = \{x \in \overline{\mathbf{R}} :\ 0 \leq x \leq 0\} = \{0\}$;

3) $]-\infty, \pi] = \{x \in \overline{\mathbf{R}} :\ \infty < x \leq \pi\} = \{x \in \mathbf{R} :\ x \leq \pi\}$;

4) $[-\infty, +\infty] = \overline{\mathbf{R}}$.

Se I è intervallo limitato, allora chiamiamo *ampiezza* di I, il numero

$$\sup I - \inf I$$

Esempi: l'ampiezza di $]-7,3]$ è 10; l'ampiezza di $[\pi, \pi]$ è 0.

$\square$

Il modulo

Def. Il *valore assoluto* o *modulo* di x:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Proprietà del modulo:

$$|x| \geq 0 \qquad |x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

$$|x+y| \leq |x| + |y| \qquad \big||x| - |y|\big| \leq |x-y|$$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \qquad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \; se \; y \neq 0.$$

Altre funzioni utili:

la *parte positiva* x^+ definita da

$$x^+ = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

la *parte negativa* x^- definita da

$$x^- = \begin{cases} -x & \text{se } x \leq 0 \\ 0 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Notiamo che $|x| = x^+ + x^-$ e $x = x^+ - x^-$.

$\square$

Funzioni monotone

(X è un sottoinsieme di $\mathbf{R}$)

Def. Una funzione $f : X \to \mathbf{R}$ si dice (monotona) *non decrescente* se mantiene la relazione d'ordine $\leq$, ovvero se

$$x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y).$$

Esempi. x, e^x, $\log x$, x^3, ogni funzione costante, la parte positiva.

Def. Una funzione $f : X \to \mathbf{R}$ si dice (monotona) *non crescente* se inverte la relazione d'ordine $\leq$, ovvero se

$$x \leq y \Longrightarrow f(y) \leq f(x).$$

Esempi. L'opposto $-f$ di ogni funzione non decrescente, ogni funzione costante, la parte negativa, ecc.

Def. Una funzione $f : X \to \mathbf{R}$ si dice (monotona) *(strettamente) crescente* se mantiene la relazione d'ordine $<$, ovvero se

$$x < y \Longrightarrow f(x) < f(y).$$

Esempi. x, e^x, $\log x$, x^3, ma non è strettamente crescente ogni funzione costante, ne' la parte positiva.

Def. Una funzione $f : X \to \mathbf{R}$ si dice (monotona) *(strettamente) decrescente* se inverte la relazione d'ordine $<$, ovvero se

$$x < y \Longrightarrow f(y) < f(x).$$

Def. Sia A un sottoinsieme del dominio di f. Una funzione f si dice non decrescente (strettamente crescente, ecc.) su A se la restrizione di f ad A è non decrescente (strettamente crescente, ecc.), ovvero

$$x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$$

per ogni $x, y \in A$.

Esempi. x^2 è strettamente crescente su $[0, +\infty)$. $|x|$ è strettamente crescente su $[0, +\infty)$ e strettamente decrescente su $(-\infty, 0]$. $|x|$ non è monotona su $(-2, 2)$.

NOTA: Una funzione è non-decrescente se e solo se

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \geq 0$$

per ogni $x, y \in X$ con $x \neq y$; una funzione è strettamente crescente se e solo se

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} > 0$$

per ogni $x, y \in X$ con $x \neq y$.

NOTA **(monotonia e calcolo degli estremi di una funzione)**:

(1) se $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ è non decrescente allora $\min f = f(a)$ e $\max f = f(b)$;

(2) se $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ è strettamente crescente allora non esistono ne' $\min f$ ne' $\max f$.

SUCCESSIONI NUMERICHE

Def. Sia $\{a_n\} \subset \mathbf{R}$ una successione; $\{a_n\}$ è *infinitesima* quando

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists m \in \mathbf{N} : \; \forall n \geq m \; |a_n| \leq \varepsilon;$$

$\{a_n\}$ *converge* a $L \in \mathbf{R}$ quando $\{a_n - L\}$ è infinitesima:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists m \in \mathbf{N} : \; \forall n \geq m \; |a_n - L| \leq \varepsilon$$

(quindi $\{a_n\}$ è infinitesima è equivalente a dire che $\{a_n\}$ converge a 0.

NOTAZIONE: scriveremo $a_n \to L$.

ESEMPIO: $\left\{(-1)^n \dfrac{3}{2n}\right\}$ è infinitesima: fissato $\varepsilon > 0$ per l'Archimedeità di $\mathbf{R}$ $\exists m \in \mathbf{N} : \; m \geq \dfrac{3}{2\varepsilon}$, ovvero $\dfrac{3}{2m} \leq \varepsilon$, per cui, se $n \geq m$

$$\left|(-1)^n \frac{3}{2n}\right| = \frac{3}{2n} \leq \frac{3}{2m} \leq \varepsilon.$$

Teorema. (UNICITÀ) $a_n \to L, \; a_n \to L' \Longrightarrow L = L'$.

Dim. Sia $\varepsilon > 0$. $\exists m, m' \in \mathbf{N} : \; \forall n \geq \max\{m, m'\} \; |a_n - L| \leq \varepsilon, \; |a_n - L'| \leq \varepsilon$. Allora

$$|L - L'| \leq |L - a_n| + |a_n - L'| \leq 2\varepsilon.$$

Questo dice che deve essere $|L - L'| = 0$, ovvero $L = L'$. $\square$

Def. Se $a_n \to L$ allora L viene chiamato il *limite* della successione $\{a_n\}$, e si denota con uno dei simboli

$$\lim_n a_n \qquad \lim_{n\to\infty} a_n \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n.$$

Def. *Intorno di* $L \in \mathbf{R}$: ogni insieme che contiene un intervallo di centro L non ridotto ad un punto.

Proposizione. $\{a_n\} \subset \mathbf{R}$, $L \in \mathbf{R}$. *Allora* $a_n \to L \Longleftrightarrow \forall$ *intorno* $I\ \exists m \in \mathbf{N}:\ \forall n \geq m$ *si ha* $a_n \in I$

Dim. Sia $a_n \to L$. Fissiamo I intorno di L. Allora $\exists \varepsilon > 0 : |L - z| \leq \varepsilon \Longrightarrow z \in I$. Per def. di limite $\exists m \in \mathbf{N} : \forall n \geq m\ |a_n - L| \leq \varepsilon$, quindi $a_n \in I$.

Viceversa: si prende $I = \{z :\ \ |L - z| \leq \varepsilon\}$. Allora $a_n \in I \Longleftrightarrow |a_n - L| \leq \varepsilon$. $\square$

ESEMPIO (importante): Sia $z \in \mathbf{R}$ con $|z| < 1$, allora $z^n \to 0$.

Dim. Dato che $1/(n+1) \to 0$, sia $m \in \mathbf{N}:\ \forall n \geq m$ si ha

$$\frac{1}{n+1} \leq 1 - |z|.$$

Quindi per $n \geq m,\ |z| \leq 1 - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n}{n+1}$. Sia ora $C = m|z|^m$. Proviamo per induzione che

$$|z|^n \leq \frac{C}{n} \qquad \forall n \geq m.$$

Infatti per $n = m$ si ha un'identità. Supposto che $|z|^n \leq C/n$ si ha

$$|z|^{n+1} = |z|^n|z| \leq |z|\frac{C}{n} \leq \frac{n}{n+1}\cdot\frac{C}{n} = \frac{C}{n+1}.$$

Dunque $|z|^n$ è infinitesima. $\square$

OSSERVAZIONE: se $\{a_n\}$ è infinitesima e $|b_n| \leq C|a_n|$, allora anche $\{b_n\}$ è infinitesima.

SUCCESSIONI REALI DIVERGENTI

Def. Una successione reale $\{a_n\}$ si dice *positivamente divergente* se

$$\forall M > 0 \exists m \in \mathbf{N} : \forall n \geq m \; a_n > M.$$

Una successione reale $\{a_n\}$ si dice *negativamente divergente* se

$$\forall M > 0 \exists m \in \mathbf{N} : \forall n \geq m \; a_n < -M$$

Nei due casi scriveremo $a_n \to +\infty$ e $a_n \to -\infty$, e

$$\lim a_n = +\infty \qquad \lim a_n = -\infty.$$

Def. (INTORNI DI $+\infty$ E $-\infty$) Gli intorni di $+\infty$ sono i sottoinsiemi di $\mathbf{R}$ il cui complementare è sup. limitato; gli intorni di $-\infty$ sono i sottoinsiemi di $\mathbf{R}$ il cui complementare è inf. limitato. Ovvero, un intorno di $+\infty$ è un qualsiasi sottoinsieme di $\mathbf{R}$ che contiente una semiretta $[x, +\infty)$; un intorno di $+\infty$ è un qualsiasi sottoinsieme di $\mathbf{R}$ che contiente una semiretta $(-\infty, x]$.

ESEMPI: $\mathbf{R} \setminus \{0\}$, $\{x \in \mathbf{R} : x^2 > 2\}$ sono intorni di $+\infty$ e $-\infty$; $]-\infty, 0[$, $\mathbf{R} \setminus \mathbf{N}$ sono intorni di $-\infty$; $[1, +\infty[$ è intorno di $+\infty$; $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$ non è intorno ne' di $+\infty$ ne' di $-\infty$.
OSSERVAZIONE. Con la notazione degli intorni si può dare un'unica definizione: sia $\{a_n\}$ una successione reale e $L \in \overline{\mathbf{R}}$. Allora

$$\lim_n a_n = L \qquad \text{(scriveremo anche } a_n \to L)$$
$$\Longleftrightarrow \forall \text{ intorno } I \text{ di } L \; \exists m \in \mathbf{N} : \; \forall n \geq m \;\; x \in I.$$

Def. $\{a_n\}$ si dice *oscillante* se non è ne' convergente ne' divergente.

ESEMPI: 1) $a_n = n$, $a_n = n!$, $a_n = n^n$ sono divergenti (basta notare che $|a_n| \geq n$ per cui dato $M > 0$ basta prendere $m = [M] + 1...$);

2) $a_n = n^\alpha$ $(\alpha > 0)$ è divergente;

2) $(-1)^n$ è oscillante;

3) $(-n)^n$ è oscillante $(|(-n)^n| = n^n...)$;

4) se $z \leq -1$ allora $\{z^n\}$ è oscillante.

OSSERVAZIONE: Sia $a_n > 0$ $\forall n$ o $a_n < 0$ $\forall n$, allora $\{a_n\}$ è infinitesima $\Longleftrightarrow$ $\{\frac{1}{a_n}\}$ è divergente (a $+\infty$ e $-\infty$ nei due casi).

In generale, se $\{a_n\} \to 0$ allora si può solo dire che $\{\frac{1}{a_n}\}$ non converge, ma può essere divergente o oscillante:

$$a_n = \frac{1}{n} \to 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{a_n} = n \to +\infty$$

$$a_n = -\frac{1}{n} \to 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{a_n} = -n \to -\infty$$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} \to 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{a_n} = (-1)^n n \text{ è oscillante.}$$

IL CALCOLO DEI LIMITI

Def. Sia $z \in \mathbf{R}$. Definiamo

$z + (+\infty) = +\infty + z = +\infty$, $z + (-\infty) = -\infty + z = -\infty$

$\frac{z}{+\infty} = \frac{z}{-\infty} = 0$

se $z \in (0, +\infty]$ allora $z \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot z = +\infty$

se $z \in [-\infty, 0)$ allora $z \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot z = -\infty$

(analogamente si può moltiplicare per $-\infty$ rispettando la regola dei segni)

NON È POSSIBILE DEFINIRE

$$\infty + \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}$$

Inoltre non è possibile definire neanche

$$\frac{L}{0} \text{ per alcun } L \in [-\infty, +\infty].$$

Queste vengono dette *forme indeterminate.*

Teorema. (PROPRIETÀ DEI LIMITI) *Siano* $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ *due successioni non oscillanti (dunque: convergenti o divergenti). Allora, se non si hanno forme indeterminate, si ha*

$$\lim_n (a_n + b_n) = \lim_n a_n + \lim_n b_n \tag{1}$$

$$\lim_n (a_n \cdot b_n) = (\lim_n a_n) \cdot (\lim_n b_n) \tag{2}$$

$$\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_n a_n}{\lim_n b_n} \tag{3}$$

(in (3) supponiamo inoltre $\lim_n b_n \neq 0$*).*

Alla dimostrazione premettiamo alcuni risultati.

Teorema. (LIMITATEZZA) $\{a_n\}$ *convergente* $\Longrightarrow$ $\{a_n\}$ *limitata.*

Dim. Sia $L = \lim_n a_n$. Sia $m : \forall n \geq m \quad |a_n - L| < 1$. Allora $\forall n \geq m \quad |a_n| \leq |L| + 1$. Dunque $\forall n$

$|a_n| \leq \max\{|L| + 1,\ |a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{m-1}|\} < +\infty.$ □

Proposizione 1. $\{a_n\}$ *limitata,* $\{b_n\}$ *diverge* $\Longrightarrow$
$\{a_n + b_n\}$ *diverge.*

Dim. Sia $s > 0$ tale che $|a_n| \leq s\ \forall n$. Fissiamo $M > 0$, e sia $m \in \mathbf{N}$ t.c. $\forall n \geq m$ si ha $|b_n| \geq M + s$. Allora $\forall n \geq m$ si ha
$|a_n + b_n| \geq |b_n| - |a_n| \geq M.$ □

ESEMPIO: La successione $\{n + (-1)^n \dfrac{2n}{n+1} \sin n\}$ diverge.

Proposizione 2. $\{a_n\}$ *limitata,* $\{b_n\}$ *infinitesima* $\Longrightarrow$ $\{a_n b_n\}$ *infinitesima.*

Dim. Sia $\varepsilon > 0$. Sia $s > 0$ tale che $|a_n| \leq s\ \forall n$. Sia $m \in \mathbf{N}$ t.c. $\forall n \geq m$ si ha $|b_n| \leq \varepsilon/s$. Allora $\forall n \geq m$ si ha
$|a_n b_n| = |a_n||b_n| \leq \varepsilon$ □

ESEMPIO: La successione $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \Big(\sin(n!) - 7\cos(42n!) \Big) \right\}$ è infinitesima.

Proposizione 3. *Somma di successioni infinitesime è infinitesima*

Dim. Esercizio □

Proviamo il teorema sulle proprietà dei limiti.

Dim. Sia $a_n \to L$ e $b_n \to L'$ $(L, L' \in \overline{\mathbf{R}})$

(1): Ci sono due casi: i) le due successioni convergono, ii) una diverge (tutte e due no: si avrebbe una forma indeterminata $\infty + \infty$).

Nel caso i) $\{a_n - L\}$, $\{b_n - L'\}$ sono infinitesime $\Longrightarrow \{a_n + b_n - L - L'\}$ infinitesima (Prop. 3) $\Longrightarrow a_n + b_n \to L + L'$.

Nel caso ii) basta applicare il teorema di limitatezza e la Prop. 1

(2): ci sono due casi: i) le due successioni convergono, ii) $L' = \infty$ e $L \neq 0$ (non può essere $L = 0$: si avrebbe una forma indeterminata $0 \cdot \infty$).

Nel caso i) basta scrivere

$a_n b_n - LL' = (a_n - L)b_n + L(b_n - L')$

e usare le Prop. 2 e 3.

Nel caso ii) dato che $L \neq 0$ $\exists r > 0$ t.c. $I = \{z \in \mathbf{R} : \ |z| \geq r\}$ è un intorno di L. Quindi $\exists m_0 \in \mathbf{N}$ t.c $\forall n \geq m_0$ $a_n \in I$, ovvero $|a_n| \geq r$. Fissiamo ora $M > 0$; dato che $b_n \to \infty$ $\exists m \in \mathbf{N}$ t.c. $\forall n \geq m$ si ha $|b_n| \geq M/r$. Allora

$|a_n b_n| = |a_n||b_n| \geq M.$

(3): basta vedere che $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{L'}$ (e poi ci si riconduce al caso (2)). Se $L' = 0$ o $L' = \infty$ basta applicare la definizione (farlo per esercizio). Rimane il caso $L' \neq 0$, $L' \in \mathbf{R}$. Notiamo che $I = \{z \in \mathbf{R} : \ |z| \geq L'/2\}$ è un intorno di L'. Quindi $\exists m_0 \in \mathbf{N}$ t.c $\forall n \geq m_0$ $b_n \in I$, ovvero $|b_n| \geq L'/2$. Se $n \geq m_0$ si ha allora

$$\Big|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{L'}\Big| = \frac{|b_n - L'|}{|b_n|\,|L'|} \leq \frac{2}{L'^2}|b_n - L'|. \quad \square$$

FORME INDETERMINATE: vediamo per esempio perche non si può dare un senso alla forma $\infty + \infty$:

i) consideriamo $a_n = n$ e $b_n = 1 - n$. Allora $a_n \to +\infty$, $b_n \to -\infty$, e $a_n + b_n = 1 \to 1$;

ii) consideriamo $a_n = 2n$ e $b_n = -n$. Allora $a_n \to +\infty$, $b_n \to -\infty$, e $a_n + b_n = n \to +\infty$;

iii) consideriamo $a_n = n$ e $b_n = -n+(-1)^n$. Allora $a_n \to +\infty$, $b_n \to -\infty$, e $a_n + b_n = (-1)^n$ è oscillante.

ESERCIZIO: costruire due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tali che $a_n \to +\infty$, $b_n \to 0$ e $a_n \cdot b_n \to L \in \mathbf{R}$ (oppure $a_n \cdot b_n \to \pm\infty$, oppure $a_n \cdot b_n$ oscilla).

$\square$

NON SI PUÒ DEFINIRE $\dfrac{1}{0} = \pm\infty$ (infatti se $a_n = \dfrac{1}{n} \to 0$ allora $\dfrac{1}{a_n} = n \to +\infty$; se $a_n = -\dfrac{1}{n} \to 0$ allora $\dfrac{1}{a_n} = -n \to -\infty$; se $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n} \to 0$ allora $\dfrac{1}{a_n} = (-1)^n n$ non diverge ad alcun infinito con segno.

SUCCESSIONI E RELAZIONE D'ORDINE

Teorema. (PERMANENZA DEL SEGNO) *Se $\{a_n\}$ è una succ. reale e $a_n \to L \in]0, +\infty]$ (risp. $a_n \to L \in [-\infty, 0[$) allora $\exists m \in \mathbf{N} : \ \forall n \geq m \quad a_n > 0$ (risp. $a_n < 0$).*

Dim. Basta notare che $]0, +\infty[$ è intorno di $L > 0$. $\square$

Teorema. (CONFRONTO) *Siano* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *successioni reali convergenti o divergenti a* $\pm\infty$. *Se* $\exists m_0 : \ \forall n \geq m_0$ *si ha* $a_n \leq b_n$, *allora*

$$\lim_n a_n \leq \lim_n b_n.$$

Dim. Se $\lim_n a_n = \lim_n b_n = +\infty$ la tesi diventa $+\infty \leq +\infty$ (che è vera). Analogamente se $\lim_n a_n = \lim_n b_n = -\infty$. Altrimenti, consideriamo la successione $\{b_n - a_n\}$. Si ha $b_n - a_n \geq 0$, ed esiste

$$\lim_n (b_n - a_n) = \lim_n b_n - \lim_n a_n.$$

Quest'ultima diferenza deve essere non negativa, altrimenti per il teor. di perm. del segno dovrebbe essere $b_n - a_n < 0$ da un certo m in poi. $\square$

ESEMPIO: $\lim_n (n + \sin n) = +\infty$.

Teorema. (DEI DUE CARABINIERI) *Siano* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *successioni reali t.c.*

$$\lim_n b_n = \lim_n a_n = L$$

Se $\{c_n\}$ *è una terza successione reale t.c.*

$$a_n \leq c_n \leq b_n,$$

allora $c_n \to L$.

Dim. $|c_n - L| \leq |a_n - L| + |b_n - L|$. $\square$

ESEMPIO: $\lim_n \frac{1}{n} \sin n = 0$. Si prende

$$a_n = -\frac{1}{n}, \qquad , b_n = \frac{1}{n}, \qquad c_n = \frac{1}{n} \sin n.$$

CONFRONTO TRA SUCCESSIONI DIVERGENTI

(1) Sia $a > 1$. Allora $\lim_n \frac{a^n}{n^\beta} = +\infty$ per ogni $\beta > 0$.

Dimostriamolo solo per $a = 4$ e $\beta = 1$. Si ha (ricordando che $2^n \geq n$ per ogni n)

$$4^n = 2^n \cdot 2^n \geq n \cdot n = n^2,$$

per cui

$$\frac{4^n}{n} \geq n$$

e il limite risulta $+\infty$ per confronto

(2) Sia $a > 1$. Allora $\lim_n \frac{n^\beta}{\log_a n} = +\infty$ per ogni $\beta > 0$.

Lo mostriamo solo per $\beta = 1$. Per definizione, dobbiamo mostrare che fissato $M > 0$ allora

$$\frac{n}{\log_a n} \geq M,$$

o equivalentemente $n \geq M \log_a n$, per n 'sufficientemente grande'. Prendendo l'esponenziale di entambi i termini, si ha equivalentemente

$$a^n \geq a^M a^{\log_a n} = a^M n,$$

ovvero

$$\frac{a^n}{n} \geq a^M.$$

Ma questa disuguaglianza è vera per n 'sufficientemente grande' perche' abbiamo visto sopra che $\frac{a^n}{n} \to +\infty$.

(3) Sia $a > 1$. Allora $\lim_n \frac{a^n}{n!} = 0$.

Per dimostrarlo notiamo che

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a \cdot a \cdots a \cdot a}{1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n} = \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdots \frac{a}{n-1} \cdot \frac{a}{n}.$$

Sia $k \geq a$ un numero naturale (che terremo fisso). Allora

$$\frac{a^n}{n!} = \left(\frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdots \frac{a}{k-1}\right) \cdot \left(\frac{a}{k} \cdots \frac{a}{n-1} \cdot \frac{a}{n}\right)$$

Il numero $C = \left(\frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdots \frac{a}{k-1}\right)$ è una costante che non dipende da n. Per i numeri seguenti vale la stima

$$\frac{a}{k} \leq 1, \qquad \frac{a}{k+1} \leq 1, \qquad , \ldots , \frac{a}{n-1} \leq 1.$$

Quindi

$$0 \leq \frac{a^n}{n!} \leq C \cdot \frac{a}{n}$$

Dato che $a/n \to 0$ anche $a^n/n! \to 0$ (per esempio usando il teorema dei due carabinieri).

(4) $\lim_n \frac{n^n}{n!} = +\infty.$

Per dimostrarlo notiamo che

$$\frac{n^n}{n!} = \frac{n \cdot n \cdots n \cdot n}{1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n}{2} \cdots \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n}{n}$$

e che

$$\frac{n}{2} \geq 1, \frac{n}{3} \geq 1, \qquad \ldots \frac{n}{n-1} \geq 1, \qquad \frac{n}{n} \geq 1.$$

Quindi

$$\frac{n^n}{n!} \geq n$$

e $n^n/n! \to +\infty$ per il teorema del confronto.

LIMITI DI SUCCESSIONI MONOTONE

Teorema. *Sia $\{a_n\}$ monotona non decrescente allora $\{a_n\}$ non oscilla e*

$\lim_n a_n = \sup_n a_n$;

sia $\{a_n\}$ monotona non crescente allora $\{a_n\}$ non oscilla e

$\lim_n a_n = \inf_n a_n$.

Dim. (caso non crescente) sia $L = \inf_n a_n$. Se mostriamo che $\forall L' \geq L \ \exists \ m$ t.c. $\forall \ n \geq m$ si ha $L \leq a_n < L'$, allora $L = \lim_n a_n$.

Per def. di inf $\exists m$ t.c. $a_m < L'$. Per la non crescenza di $\{a_n\}$, si ha $a_n \leq a_m \ \forall \ n \geq m$, e quindi

$L \leq a_n \leq a_m < L' \ \forall \ n \geq m$. $\square$

Corollario Importante. Ogni successione monotona limitata converge in $\mathbf{R}$.

Teorema. *La successione* $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *è strettamente crescente e limitata.*

Dim. (CRESCENZA) È

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k};$$

$$a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k}.$$

Perchè sia $a_n < a_{n+1}$ basta dunque vedere che $\forall \ k, n$

$$(*) \qquad \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k}.$$

Dimostriamolo per induzione su k. Per $k = 0$ si ha

$$\binom{n}{0} \frac{1}{(n)^0} = 1 = \binom{n+1}{0} \frac{1}{(n+1)^0}.$$

Supponiamo ora che $k \geq 1$, e che valga

$$\binom{n}{k-1}\frac{1}{n^{k-1}} \leq \binom{n+1}{k-1}\frac{1}{(n+1)^{k-1}}.$$

Allora

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{1}{n^k} \\
&= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}\frac{1}{n^{k-1}}\frac{(n-k+1)}{nk} \\
&= \binom{n}{k-1}\frac{1}{n^{k-1}}\frac{(n-k+1)}{nk} \\
&\leq \binom{n+1}{k-1}\frac{1}{(n+1)^{k-1}}\frac{(n-k+1)}{nk} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k-1)!(n-k+2)!}\frac{1}{(n+1)^{k-1}}\frac{(n-k+1)}{nk} \\
&= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}\frac{1}{n\,(n+1)^{k-1}}\frac{(n-k+1)}{(n-k+2)} \\
&= \binom{n+1}{k}\frac{1}{n\,(n+1)^{k-1}}\frac{(n-k+1)}{(n-k+2)} \\
&\leq \binom{n+1}{k}\frac{1}{(n+1)^k},
\end{aligned}$$

ovvero $(*)$.

(LIMITATEZZA) Vediamo che $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 3$, ovvero

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \leq 3.$$

Notiamo alcune cose:

i) $\forall\ n, k\ \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \le \frac{1}{k!}$

Infatti (induzione su $k \le n$) per $k = 0$ si ha un'identità ; supponendo che si abbia

$\binom{n}{k-1}\frac{1}{n^{k-1}} \le \frac{1}{(k-1)!}$ $(k \ge 1)$, otteniamo:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{1}{n^k}\\
&= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}\frac{1}{n^{k-1}}\frac{(n-k+1)}{nk}\\
&= \binom{n}{k-1}\frac{1}{n^{k-1}}\frac{1}{k}\frac{(n-k+1)}{n}\\
&\le \frac{1}{(k-1)!}\frac{1}{k}\frac{(n-k+1)}{n} \le \frac{1}{k!}
\end{aligned}$$

Quindi $a_n \le \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$; maggioriamo questa somma con un'altra più facile da calcolare, usando la seguente osservazione:

ii) $\forall\ k \ge 1$ si ha $k! \ge 2^{k-1}$, infatti
$k! = k \cdot (k-1) \cdots 3 \cdot 2 \ge 2 \cdots 2 = 2^{k-1}$.

Dunque si ha $a_n \le \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \le 1 + \sum_{k=1}^{n} 2^{1-k} = 1 + \sum_{j=0}^{n-1} 2^{-j}$.
Questa somma si può calcolare facilmente:

iii) sia $a \ne 1$; allora $\sum_{j=0}^{n-1} a^j = \frac{1-a^n}{1-a}$, infatti basta ricordare che

$(1 - a^n) = (1 - a)(1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1})$.

In particolare ($a = 1/2$)

$$\sum_{j=0}^{n-1} 2^{-j} = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^j = \frac{1-(1/2)^n}{1-(1/2)} = 2 - 2^{1-n}.$$

Tirando le somme $a_n \leq 1 + 2 - 2^{1-n} < 3$ $\square$

Corollario. $e = \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

SOTTOSUCCESSIONI

Def. $\{b_n\}$ è *sottosuccessione* di $\{a_n\}$ se $\exists\, f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strettamente crescente tale che

$$b_k = a_{f(k)}.$$

In genere si scrive n_k invece di $f(k)$, per cui

$$b_k = a_{n_k}.$$

NOTA: si ha $\lim_k f(k) = +\infty$.

ESEMPI: $\{4n^2\}$ è sottosuccessione della successione $\{n^2\}$ (prendendo $f(n) = 2n$);

le successioni costanti $\{1\}$ e $\{-1\}$ sono sottosuccessioni della successione oscillante $\{(-1)^n\}$ (prendendo $f(n) = 2n$ e $f(n) = 2n+1$ nei due casi);

la successione costante $\{0\}$ è sottosuccessione della successione $\{\cos(n\pi/4)\}$ (prendendo per esempio $f(n) = 8n + 2$). Quali sono i possibili limiti di sottosuccessioni di tale successione?

le successioni divergenti, rispettivamente a $= \infty$ e $-\infty$, $\{(2n)^{2n}\}$ e $\{-(2n+1)^{2n+1}\}$ sono sottosuccessioni della successione oscillante $\{(-n)^n\}$. Ne esistono sottosuccessioni convergenti?

Teorema. *$a_n \to L \implies a_{n_k} \to L$ $\forall$ sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ di $\{a_n\}$.*

Dim. Sia I intorno di L e m_0 t.c. $\forall n \geq m_0$ si ha $a_n \in I$. Dato che $\lim_k n_k = +\infty$, $\exists m \in \mathbf{N}$ t.c. $\forall k \geq m$ si ha $n_k \geq m_0$. Allora

$$a_{n_k} \in I \quad \forall k \geq m. \qquad \square$$

Corollario Importante. Se $\exists$ $\{a_{n_k}\}$ e $\{a_{n'_k}\}$ due sottosuccessioni di $\{a_n\}$ tali che

$$a_{n_k} \to L \qquad a_{n'_k} \to L'$$

e $L \neq L'$, allora $\{a_n\}$ oscilla.

ESEMPIO: per dimostrare che $\{(-1)^n\}$ oscilla si può notare che $(-1)^{2n} = 1 \to 1$, e $(-1)^{2n+1} = -1 \to -1 \neq 1$.

Foglio di esercizi - 11 ottobre 2002

1. Calcolare (se esistono) max, min, inf, sup di $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{2} & \text{se } x \in [-1, 1] \setminus \mathbf{Z} \\ 1 & \text{se } x \in \{-1, 0, 1\}. \end{cases}$$

2. Calcolare (se esistono) max, min, inf, sup di $f : [-3, 3] \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{5+x} & \text{se } x \in [-3, 3] \setminus \mathbf{Z} \\ (-1)^x & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

3. Calcolare massimo e minimo (se esistono) della funzione $f : (1, 5) \to \mathbf{R}$ definita

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2 & \text{se } x \in (1, 5) \setminus \mathbf{Z} \\ x^4 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

4. Calcolare (se esiste)

$$\lim_n \frac{\log((n+1)!) - \log(n!)}{\log(2n^6)}$$

5. Calcolare (se esiste)

$$\lim_n \frac{(n+2)! - n!}{(2n^2+1)n!}$$

6. Calcolare (se esiste)

$$\lim_n \frac{3n^2 + n \sin n + n}{n^2 + n + \cos n}$$

7. Calcolare (se esiste)

$$\lim_n \frac{3^{n+(-1)^n} + n}{3^n + 1}$$

8. Calcolare (se esiste)

$$\lim_n \frac{(2n)!}{n^n}$$

Soluzioni

1. Si ha
$$\left\{\frac{|x|}{2} : x \in [-1,1] \setminus \mathbf{Z} \ \right\} = \left\{\frac{|x|}{2} : x \in (-1,1) \setminus \{0\}\right\} = \left(0, \frac{1}{2}\right),$$
quindi
$$\{f(x) : x \in [-1,1]\} = \{1\} \cup \left(0, \frac{1}{2}\right),$$
per cui
$$\max f = 1, \qquad \inf f = 0,$$
e non esiste il $\min f$.

2. Si ha
$$\{f(x) : x \in [-3,3]\} = A \cup B,$$
dove
$$A = \{f(x) : x \in [-3,3] \setminus \mathbf{Z} \ \} = \left\{\frac{1}{5+x} : x \in (-3,3) \setminus \{-2,-1,0,1,2\}\right\}$$
$$= \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right) \setminus \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}\right\},$$
e
$$B = \{-1, 1\}.$$
Dunque
$$\min f = -1, \qquad \text{e} \qquad \max f = 1.$$

3. Si ha
$$\{f(x) : x \in (1,5)\} = A \cup B,$$
dove
$$A = \{f(x) : x \in (1,5) \setminus \mathbf{Z}\} = \{4x^2 : x \in (1,5) \setminus \{2,3,4\}\} = (4,100) \setminus \{16,36,64\}$$
e
$$B = \{f(x) : x \in \{2,3,4\}\} = \{x^4 : x \in \{2,3,4\}\} = \{16, 81, 256\}.$$
Dunque
$$\max f = 256, \qquad \inf f = 4,$$
ma non esiste $\min f$.

4. Ricordando che $(n+1)! = n!(n+1)$ e che $\log a - \log b = \log(a/b)$, si ottiene
$$\log((n+1)!) - \log n! = \log(n+1) = \log n + \log\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

Mentre
$$\log(2n^6) = 6\log n + \log 2.$$
Possiamo quindi scrivere
$$\frac{\log((n+1)!) - \log n!}{\log(2n^6)} = \frac{1 + \dfrac{\log\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)}{\log n}}{6 + \dfrac{\log 2}{\log n}}.$$
Dato che
$$\lim_n \frac{\log\Big(1+\frac{1}{n}\Big)}{\log n} = 0, \qquad \lim_n \frac{\log 2}{\log n} = 0,$$
il limite cercato vale $1/6$.

5. Ricordando che $(n+2)! = n!(n+1)(n+2)$, si ha
$$\frac{(n+2)! - n!}{(2n^2+1)n!} = \frac{((n+2)(n+1)-1)n!}{(2n^2+1)n!} = \frac{((n+2)(n+1)-1)}{(2n^2+1)}$$
$$= \frac{n^2+3n+1}{2n^2+1} = \frac{1 + \dfrac{3}{n} + \dfrac{1}{n^2}}{2 + \dfrac{1}{n^2}},$$
e quindi il limite desiderato vale $1/2$, dato che
$$\lim_n \frac{1}{n} = \lim_n \frac{1}{n^2} = 0.$$

6. Si ha
$$\lim_n \frac{\sin n}{n} = \lim_n \frac{\cos n}{n^2} = 0$$
(successione limitata diviso successione divergente), quindi, il limite si può scrivere
$$\lim_n \frac{3 + \dfrac{\sin n}{n} + \dfrac{1}{n}}{1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{\cos n}{n^2}} = 3.$$

7. La successione $\{a_n\}$ in questione si può scrivere (dividendo numeratore e denominatore per 3^n)
$$a_n = \frac{3^{(-1)^n} + \frac{n}{3^n}}{1 + 3^{-1}} = \begin{cases} \dfrac{3 + \frac{n}{3^n}}{1 + 3^{-n}} & \text{se } n \text{ è pari} \\[2ex] \dfrac{\frac{1}{3} + \frac{n}{3^n}}{1 + 3^{-n}} & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Ricordando che $n/3^n \to 0$ e $3^{-n} \to 0$ si ha che la sottosuccessione $\{a_{2k}\}$ degli elementi pari di $\{a_n\}$ converge a 3 mentre la sottosuccessione $\{a_{2k+1}\}$ degli elementi dispari di $\{a_n\}$ converge a $1/3$. Dunque $\{a_n\}$ oscilla e il limite *non esiste*.

8.

Scriviamo

$$\frac{(2n)!}{n^n} = \frac{(2n)\cdot(2n-1)\cdots(n+1)}{n\cdot n\cdots n}n! = \frac{2n}{n}\cdot\frac{2n-1}{n}\cdots\frac{n+1}{n}\cdot n!.$$

Dato che

$$\frac{2n}{n} \geq 1, \frac{2n-1}{n} \geq 1, \ldots \frac{n+1}{n} \geq 1$$

si ha

$$\frac{(2n)!}{n^n} \geq n!$$

e la successione diverge a $+\infty$ per il teorema del confronto.

LIMITI DI FUNZIONI (REALI)

Estendiamo la nozione di limite all'infinito a funzioni reali di variabile reale

Def. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; diremo che $f(x)$ tende al numero $L \in \mathbf{R}$ per $x \to +\infty$ se

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists M > 0 :\ x \geq M \Longrightarrow |L - f(x)| \leq \varepsilon.$$

In tal caso il numero L si dice il limite di f per $x \to +\infty$, e si scrive $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$.

Allo stesso modo si definiscono

i) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Longleftrightarrow$
$\forall N > 0\ \exists M > 0 :\ \forall x \geq M \quad f(x) \geq N,$

ii) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \Longleftrightarrow$
$\forall N > 0\ \exists M > 0 :\ \forall x \geq M\ f(x) \leq -N.$

La nozione di limite per $x \to -\infty$ viene data per simmetria:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \Longleftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists M > 0 :\ \forall x \leq -M \quad |f(x) - L| \leq \varepsilon,$

ovvero $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x \to +\infty} f(-x) = L.$

Ovviamente si estendono le definizioni di limiti $\pm\infty$.
Esempi. Molti esempi visti con le successioni si adattano a questo caso, per cui

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0, \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2}{1 + x^2} = 2, \qquad \lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty, \text{ etc.}$$

LIMITI AL FINITO

Def. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ e $x_0 \in \mathbf{R}$; diremo che $f(x)$ tende al numero $L \in \mathbf{R}$ per $x \to x_0$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; |x - x_0| \le \delta, x \ne x_0 \Longrightarrow |L - f(x)| \le \varepsilon.$$

In tal caso il numero L si dice il limite di f per $x \to x_0$, e si scrive $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$.

NOTA: x_0 non viene preso in considerazione perche non vogliamo che il valore di f in x_0 influenzi il limite.

Allo stesso modo si definiscono

i) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Longleftrightarrow$

$\forall N > 0 \; \exists \delta > 0 : \; \forall x : \; |x - x_0| \le \delta, x \ne x_0 \quad f(x) \ge N,$

ii) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Longleftrightarrow$

$\forall N > 0 \; \exists \delta > 0 : \; \forall x : \; |x - x_0| \le \delta, x \ne x_0 \quad f(x) \le -N.$

NOTA: le definizioni di limite ora date si possono riassumere con il linguaggio degli intorni: siano $L, x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$; allora

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \Longleftrightarrow \forall$ intorno I di L esiste un intorno J di x_0 tale che se $x_0 \ne x \in J$, allora $f(x) \in I$.

NOTA. Per definire il limite per $x \to x_0$ basta che il dominio di f contenga un intorno "bucato" di x_0, ovvero un insieme del tipo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$.

Esempi.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty.$$

Sia $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq x_0 \\ 1 & \text{se } x = x_0. \end{cases}$ In questo caso $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, ma $f(x_0) = 1$.

NOTA (caratterizzazione per successioni) Si ha $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ $(x_0, L \in \overline{\mathbf{R}})$ se e solo se per ogni successione $a_n \to L$ con $a_n \neq L$ (almeno per n grande) si ha $\lim_n f(a_n) = L$.

ESEMPI DI NON ESISTENZA

Per dimostrare che un limite $\lim_{x\to x_0} f(x)$ non esiste basta trovare due successioni a_n e a'_n che convergono entrambe a x_0, ma tali che $\lim_n f(a_n) \neq \lim_n f(a'_n)$.

Applicheremo questo criterio agli esempi successivi.

1. $f(x) = \sin x$, $x_0 = +\infty$. Non esiste

$$\lim_{x\to+\infty} \sin x$$

Basta prendere

$$a_n = n\pi, \qquad a'_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Si ha $a_n, a'_n \to +\infty$, ma

$$f(a_n) = 0 \to 0, \qquad f(a'_n) = 1 \to 1.$$

2. $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, $x_0 = 0$. Non esiste

$$\lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$$

Basta prendere

$$a_n = \frac{1}{n\pi}, \qquad a'_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}.$$

Si ha $a_n, a'_n \to 0$, ma

$$f(a_n) = 0 \to 0, \qquad f(a'_n) = 1 \to 1.$$

3. $f(x) = \sin x$, $x_0 = +\infty$. Non esiste

$$\lim_{x \to +\infty} x \sin x$$

Basta prendere

$$a_n = n\pi, \qquad a'_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Si ha $a_n, a'_n \to +\infty$, ma

$$f(a_n) = 0 \to 0, \qquad f(a'_n) = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \to +\infty.$$

Definiamo la funzione **parte intera** di x come

$$[x] = \max\{z \in \mathbf{Z} : z \le x\}$$

(questa è una buona definizione. Qui si usa la proprietà che *ogni insieme superiormente limitato e non vuoto di* $\mathbf{Z}$ *ha massimo.*
NOTA: se si scrive x nella forma decimale e $x \ge 0$ allora $[x]$ coincide con il numero 'prima della virgola' (bisogna solo evitare di scrivere $0,999999....$ invece di 1). Questa regola non è valida per $x < 0$. Infatti la parte intera di $-0,5$ è -1.

4. $f(x) = [x]$, $x_0 = 0$. Non esiste

$$\lim_{x\to 0}[x]$$

Basta prendere

$$a_n = \frac{1}{n}, \qquad a'_n = -\frac{1}{n}.$$

Si ha $a_n, a'_n \to 0$, ma

$$f(a_n) = 0 \to 0, \qquad f(a'_n) = -1 \to -1.$$

Definiamo la funzione **segno** di x come

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

5. $f(x) = \operatorname{sign} x$, $x_0 = 0$. Non esiste

$$\lim_{x\to 0}\operatorname{sign} x$$

Basta prendere

$$a_n = \frac{1}{n}, \qquad a'_n = -\frac{1}{n}.$$

Si ha $a_n, a'_n \to 0$, ma

$$f(a_n) = 1 \to 1, \qquad f(a'_n) = -1 \to -1.$$

6. $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 0$. Non esiste

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$$

Basta prendere

$$a_n = \frac{1}{n}, \qquad a'_n = -\frac{1}{n}.$$

Si ha $a_n, a'_n \to 0$, ma

$$f(a_n) = n \to +\infty, \qquad f(a'_n) = -n \to -\infty.$$

7. $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{|x|}$, $x_0 = 0$. Non esiste

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right)$$

Basta prendere

$$a_n = \frac{1}{n}, \qquad a'_n = -\frac{1}{n}.$$

Si ha $a_n, a'_n \to 0$, ma

$$f(a_n) = 0 \to 0, \qquad f(a'_n) = -2n \to -\infty.$$

CALCOLO DEI LIMITI - FUNZIONI CONTINUE in x_0

I teoremi di somma, prodotto, quoziente, confronto, e dei due carabinieri continuano a valere per i limiti di funzioni con lo stesso enunciato dei limiti di successioni.

Il calcolo dei limiti viene spesso semplificato nel semplice calcolo di una funzione nel punto in cui si calcola il limite.

Def. Una funzione f si dice *continua nel punto* x_0 quando si ha

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Esempio. Il più semplice esempio di funzione che ammette limite in x_0 ma non è continua in x_0 è $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq x_0 \\ 1 & \text{se } x = x_0. \end{cases}$

Per i teoremi sui limiti si ha:

Teorema. *Somma, differenza, prodotto di funzioni f e g continue in x_0 sono continue in x_0. Se $g \neq 0$ in un intorno di x_0, allora anche $\frac{f}{g}$ è continua in x_0.*

Corollario. I polinomi sono funzioni continue in ogni $x_0 \in \mathbf{R}$. Le funzioni razionali sono continue in ogni punto del loro dominio.

Dim. Le costanti e la funzione identità $x \mapsto x$ sono ovviamente continue. Basta quindi applicare il teorema precedente. $\square$

Proposizione. *Gli esponenziali, i logaritmi,* cos*,* sin *sono funzioni continue.*

Esempio. Per calcolare il limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$$

(che è una forma indeterminata $\pm\infty / \pm\infty$) si nota che per $x \neq 1$

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1,$$

quindi

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2,$$

dato che $x+1$ è continua e vale 2 in $x = 1$.

Lezione del 18 ottobre 2002 - Esercizi sui limiti

Riepilogo degli “sviluppi” calcolati nelle lezioni precedenti: per $x \to 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin x = x + o(x) \\ \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \\ \tan x = x + o(x) \\ \log(1+x) = x + o(x) \\ e^x = 1 + x + o(x) \end{array}}$$

Esercizio 1.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(e^x + x)}{1 - \cos(\sqrt{x})}$$

Svolgimento:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(e^x + x)}{1 - \cos(\sqrt{x})} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\log((1 + x + o(x)) + x)}{1 - (1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x})^2 + o((\sqrt{x})^2))} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1 + 2x + o(x))}{\frac{1}{2}x + o(x)} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{2x + o(x) + o(2x + o(x))}{\frac{1}{2}x + o(x)} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{2x + o(x)}{\frac{1}{2}x + o(x)} = 4 \end{aligned}$$

⋆ ⋆ ⋆

Esercizio 2.

$$\lim_{x\to +\infty} x^3 \left(\log\left(x^2 + \frac{6}{x}\right) - 2\log x\right)$$

Svolgimento:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to +\infty} x^3 \left(\log\left(x^2 + \frac{6}{x}\right) - 2\log x\right) &= \lim_{x\to +\infty} x^3 \log\left(\frac{x^2 + \frac{6}{x}}{x^2}\right) \\ &= \lim_{x\to +\infty} x^3 \log\left(1 + \frac{6}{x^3}\right) \end{aligned}$$

$$\overset{\boxed{y=1/x}}{=} \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{y^3}\log(1+6y^3)$$

$$= \lim_{y\to 0^+} \frac{6y^3+o(y^3)}{y^3} = 6$$

⋆⋆⋆

Esercizio 3.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi\cos x)}{x^2}$$

Svolgimento: si ricorda che $\sin(\pi - x) = \sin x$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi\cos x)}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)))}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi-\frac{\pi}{2}x^2+o(x^2))}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}x^2+o(x^2))}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\pi}{2}x^2+o(x^2)}{x^2} = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

⋆⋆⋆

Esercizio 4.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$$

Svolgimento:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^3}\left(\frac{1}{\cos x} - 1\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^3}\left(\frac{1-\cos x}{\cos x}\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(x+o(x))(\frac{1}{2}x^2+o(x^2))}{x^3(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2))} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^3+o(x^3)}{x^3+o(x^3)} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Si noti che se in questo caso si fosse usato lo sviluppo $\tan x = x + o(x)$ si sarebbe ottenuto

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{(x + o(x)) - (x + o(x))}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{x^3}$$

senza riuscire a determinare il risultato finale.

⋆⋆⋆

Esercizio 5.

$$\lim_{x\to 0} \frac{(2x+1)^{3x} - 1}{(5x+1)^{2x} - 1}$$

Svolgimento:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{(2x+1)^{3x} - 1}{(5x+1)^{2x} - 1} &= \lim_{x\to 0} \frac{e^{3x\log(1+2x)} - 1}{e^{2x\log(1+5x)} - 1} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{e^{3x(2x+o(x))} - 1}{e^{2x(5x+o(x))} - 1} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{e^{6x^2+o(x^2)} - 1}{e^{10x^2+o(x^2)} - 1} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(1 + 6x^2 + o(x^2)) - 1}{(1 + 10x^2 + o(x^2)) - 1} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{6x^2 + o(x^2)}{10x^2 + o(x^2)} = \frac{3}{5}
\end{aligned}$$

⋆⋆⋆

Esercizio 6.

$$\lim_{x\to 1} (1-x) \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

Svolgimento: si ricorda che $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{1}{\tan x}$

$$\lim_{x\to 1} (1-x) \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) \overset{\boxed{y = 1 - x}}{=} \lim_{y\to 0} y \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi y}{2}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{y\to 0} \frac{y}{\tan\left(\frac{\pi y}{2}\right)} \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{y}{\frac{\pi y}{2} + o(y)} = \frac{2}{\pi}
\end{aligned}
$$

Esercizio 7.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(1-3x)^{\frac{1}{x}}}{2^{x^3}-1}$$

Svolgimento:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{xe^{\frac{1}{x}\log(1-3x)}}{e^{x^3\log 2}-1} &= \lim_{x\to 0} \frac{xe^{\frac{-3x+o(x)}{x}}}{(1+x^3\log 2 + o(x^3))-1} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{xe^{-3}}{x^3\log 2 + o(x^3)} = \lim_{x\to 0} = \frac{e^{-3}}{x^2\log 2} = +\infty
\end{aligned}
$$

⋆ ⋆ ⋆

Esercizio 8. Calcolare l'eventuale asintoto per $x \to -\infty$ della funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2+4x-1}$$

Svolgimento: Calcolo del coefficiente angolare m:

$$
\begin{aligned}
m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+4x-1}}{x} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2}+o(\sqrt{x^2})}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|+o(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{x} = -1
\end{aligned}
$$

Calcolo della intercetta q:

$$
\begin{aligned}
q = \lim_{x\to-\infty} f(x) - mx &= \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+4x-1} + x \\
&= \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+4x-1}+x\right) \cdot \frac{\sqrt{x^2+4x-1}-x}{\sqrt{x^2+4x-1}-x} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{(x^2+4x-1)-x^2}{\sqrt{x^2+4x-1}-x} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{4x-1}{\sqrt{x^2}+o(x)-x} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{4x-1}{|x|+o(x)-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x-1}{-2x+o(x)} = -2
\end{aligned}
$$

Quindi l'asintoto richiesto è: $y = -x - 2$

Esempio. Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}).$$

Il limite è nella forma indeterminata $+\infty-\infty$. Moltiplicando e dividendo per $(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$ si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}.$$

A questo punto abbiamo una forma $1/+\infty$, e quindi il limite è 0.

Esempio. Calcolare

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}+x).$$

Il limite è nella forma indeterminata $+\infty-\infty$. Moltiplicando e dividendo per $(\sqrt{x^2+x}-x)$ si ottiene

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}+x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}+x)(\sqrt{x^2+x}-x)}{(\sqrt{x^2+x}-x)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2+x)-x^2)}{\sqrt{x^2+x}-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x}.$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1)} = -\frac{1}{2}.$$

LIMITI FONDAMENTALI (prima parte)

Il limite che permette il calcolo di forme indeterminate in cui sono presenti funzioni trigonimetriche è:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

La dimostrazione di questo limite si ha subito dalla disuguaglianza trigonometrica (per $x > 0$)

$$\sin x \leq x \leq \tan x,$$

da cui si ottiene (dividendo per $\sin x$ e prendendo gli inversi)

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

La stessa disuguaglianza si ottiene per $x < 0$. Il limite si ottiene usando il teorema dei due carabinieri e la continuità del coseno.

Esempio.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1,$$

poichè si può scrivere

$$\frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}.$$

Il secondo limite fondamentale è

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(1+\frac{1}{x}\Big)^x = e.$$

Lo deduciamo dal corrispondente limite di successioni

$$\lim_n\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n = e.$$

Infatti per $x > 0$ prendiamo $n = [x]$ (la parte intera di x). Abbiamo le diseguaglianze

$$n \le x \le n+1, \qquad \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{n},$$

da cui

$$\Big(1+\frac{1}{n+1}\Big)^x \le \Big(1+\frac{1}{x}\Big)^x \le \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^x,$$

Inoltre (per la monotonia delle esponenziali di base > 1) si ha

$$\Big(1+\frac{1}{n+1}\Big)^x \ge \Big(1+\frac{1}{n+1}\Big)^n = \frac{\Big(1+\frac{1}{n+1}\Big)^{n+1}}{1+\frac{1}{n}},$$

e anche

$$\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^x \le \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{n+1} = \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n\Big(1+\frac{1}{n}\Big).$$

In conclusione, abbiamo la doppia diseguaglianza

$$\frac{\Big(1+\frac{1}{n+1}\Big)^{n+1}}{1+\frac{1}{n}} \le \Big(1+\frac{1}{x}\Big)^x \le \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n\Big(1+\frac{1}{n}\Big).$$

Quando $x \to +\infty$ (e in corrispondenza $n \to +\infty$) i termini estermi della diseguqglianza tendono ad e, e il limite è dimostrato per il teorema dei due carabinieri.

LIMITI E COMPOSIZIONE

L'operazione di limite si 'comporta bene' per composizione con funzioni continue.

Teorema. *Sia* $\lim_{x\to x_0} g(x) = y_0$ *e sia* f *continua in* y_0. *Allora esiste*

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(y_0).$$

Questo teorema ci dice che se $\lim_{x\to x_0} g(x) = y_0$ e se f è continua in y_0, per calcolare il limite

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)),$$

basta porre $y = g(x)$ e calcolare il limite

$$\lim_{y\to y_0} f(y).$$

Se f è continua questo limite è $f(y_0)$. Un altro modo per scrivere il risultato è che se f è continua allora

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f\Big(\lim_{x\to x_0} g(x)\Big).$$

Corollario. *Se* g *è continua in* x_0 *e* f *è continua in* $y_0 = g(x_0)$ *allora la composizione* $f \circ g$ *è continua in* x_0.

Esempio. Calcoliamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$$

Per ricondurci al limite fondamentale, moltiplichiamo e dividiamo per $(1+\cos x)$, per cui (ricordandoci che $1-\cos^2 x = \sin^2 x$)

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}.$$

Dato che $(1 + \cos x) \to 2$, abbiamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2.$$

Possiamo vedere quest'ultimo limite come composizione delle funzioni

$$g(x) = \frac{\sin x}{x}, \qquad f(y) = y^2,$$

e applicare il teorema con $y_0 = 1$. Dunque

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Esempio. Calcoliamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$$

Si ha

$$\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{\tan x}{x} \cdot \frac{1-\cos x}{x^2},$$

quindi il limite vale 1/2.

Esempio. Mostriamo che in generale non si può sostituire l'ipotesi che f sia continua in y_0 con l'ipotesi che esista il $\lim_{y\to y_0} f(y)$.

Basta infatti prendere $f(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \neq 0 \\ 1 & \text{se } y = 0 \end{cases}$ e g la costante 0. Allora per ogni x_0 abbiamo

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = 0,$$

per cui $y_0 = 0$, ma

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = 1 \neq 0 = \lim_{y\to 0} f(y).$$

La ragione per cui non vale la conclusione del teorema in questo esempio è che la funzione g prende il valore 0 che è 'proibito' nel calcolo del limite $\lim_{y\to 0} f(y)$. Se si evita il valore 'proibito' il teorema vale come segue:

Teorema. *Se* $\lim_{x\to x_0} g(x) = y_0$, $\lim_{y\to y_0} f(y) = L$, *e* $g(x) \neq y_0$ *per* $x \neq x_0$ *(per* x *sufficientemente vicino a* x_0*), allora*

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = L.$$

Esempio. Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x + x^2)}{10x + 7x^2}.$$

Scriviamo

$$\frac{\sin(5x + x^2)}{10x + 7x^2} = \frac{\sin(5x + x^2)}{5x + x^2} \cdot \frac{5x + x^2}{10x + 7x^2}.$$

Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{5x + x^2}{10x + 7x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x(5 + x)}{x(10 + 7x)} = \lim_{x\to 0} \frac{5 + x}{10 + 7x} = \frac{1}{2},$$

per cui

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x + x^2)}{10x + 7x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x + x^2)}{5x + x^2}.$$

Poniamo

$$g(x) = 5x + x^2, \qquad f(y) = \frac{\sin y}{y}.$$

Possiamo applicare il teorema con $x_0 = 0$, e

$$y_0 = \lim_{x\to 0} g(x) = 0,$$

dato che $g(x) \neq 0$ per $x \neq 0$ (per x sufficientemente vicino a x_0).
Si ha allora

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(5x + x^2)}{5x + x^2} = \lim_{y \to 0} f(y) = 1.$$

Esempio. Si ha

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Possiamo scrivere $y = -x$, per cui

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y}$$

$$= \lim_{y \to +\infty} \left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y \to +\infty} \left(\frac{y}{y-1}\right)^y$$

$$= \lim_{y \to +\infty} \left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^y$$

Poniamo $z = y - 1$. Allora si ha

$$= \lim_{y \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^y = \lim_{z \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^{z+1}$$

$$= \lim_{z \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z \left(1 + \frac{1}{z}\right) = e.$$

Esempio. Per ogni $a \in \mathbf{R}$ si ha

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a.$$

Se $a = 0$ il limite è banale. Altrimenti si usa la sostituzione $y = x/a$.

LIMITI DESTRO E SINISTRO

Def. Se f è definita in un qualche intervallo della forma $(x_0, x_0+\delta)$ allora si definisce il *limite destro di* f *in* x_0 e scriviamo

$$\lim_{x\to x_0+} f(x)$$

se nella definizione di limite teniamo conto solo dei punti $x > x_0$. Simmetricamente si definisce il *limite sinistro di* f *in* x_0 e scriviamo

$$\lim_{x\to x_0-} f(x).$$

ESEMPIO: la funzione parte intera non ammette limite per $x \to 0$, però si ha

$$\lim_{x\to 0-}[x] = -1 \qquad \lim_{x\to 0+}[x] = 0.$$

Analogamente

$$\lim_{x\to 0-}\frac{1}{x} = -\infty \qquad \lim_{x\to 0+}\frac{1}{x} = +\infty.$$

Proposizione. *Sono equivalenti le condizioni:*

i) $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$

ii) $\lim_{x\to x_0+} f(x) = L$ *e* $\lim_{x\to x_0-} f(x) = L$.

Dim. i) $\Longrightarrow$ ii): fissato ε (oppure M se il limite è $\pm\infty$) il δ che va bene per la def. di limite va bene anche per i limiti destro e sinistro;

ii) $\Longrightarrow$ i): fissato ε (oppure M...) si trova δ' (risp. δ'') tale che se $x \in (x_0-\delta', x_0)$ (risp. se $x \in (x_0, x_0+\delta'')$ allora $|f(x)-L| \le \varepsilon$ (risp. $f(x) \ge M$...). Prendendo $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$ questo va bene nella def. di limite. $\square$

Esempio. Si ha
$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e.$$

Per provarlo mostriamo che coincidono i limiti destro e sinistro. Per il destro si ha, scrivendo $y = 1/x$,
$$\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{1/x} = \lim_{y\to +\infty}\Big(1+\frac{1}{y}\Big)^y = e.$$
Analogamente per il sisistro.

LIMITI FONDAMENTALI (seconda parte)

Il limite che permette il calcolo di forme indeterminate in cui sono presenti funzioni logaritmiche è:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1.$$
La dimostrazione di questo limite si ha subito dal limite
$$\lim_{x\to 0}\Big(1+x\Big)^{1/x} = e.$$

Esempio. Si calcoli
$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos x)}{x^2}.$$

Scriviamo
$$\log(\cos x) = \log(1+(\cos x - 1)),$$
per cui (pongo $y = \cos x - 1$)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos x)}{\cos x - 1} = \lim_{y\to 0}\frac{\log(1+y)}{y} = 1.$$
Allora il limite diventa
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Foglio di esercizi - 19 ottobre 2002

Calcolare i seguenti limiti (se esistono).

1.

$$\lim_{x\to+\infty} x - \sqrt{x^2 - x\log x + 7x - 1}.$$

2.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(\pi\cos x)}{e^{x^2} - 1}.$$

3.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 - |x|^3 + (x^2)^{3/2}}{3x^3 - \sin(x^3)}$$

4.

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{1/\log x}$$

5.

$$\lim_{x\to 0+} \frac{(1-7x)^{\log x} - 1}{(e^{2x} - 1)\log(x^3)}$$

6.

$$\lim_{x\to+\infty} x\log\left(1 + \frac{2}{x}\right)$$

7.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{7e^{x+\sin x} + 9}{15e^x + 23}$$

8.

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin(4^x - 1)}{2^{\sin x} - 1}$$

Soluzioni

1. Dividendo e moltiplicando per $x+\sqrt{x^2-x\log x+7x-1}$ si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-(x^2-x\log x+7x-1)}{x+\sqrt{x^2-x\log x+7x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\log x-7x+1}{x+\sqrt{x^2-x\log x+7x-1}}.$$

Dato che $7x<<x\log x$, $1<<x\log x$, e

$$\sqrt{x^2-x\log x+7x-1}=x\sqrt{1-\frac{\log x}{x}+\frac{7}{x}-\frac{1}{x^2}}=x+o(x),$$

il limite è uguale a

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\log x}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\log x=+\infty.$$

2. Volendo usare il limite $\lim_{y\to0}\frac{\tan y}{y}=1$, dato che $\tan y=\tan(y-\pi)$ riscriviamo

$$\tan(\pi\cos x)=\tan(\pi\cos x-\pi)=\tan(\pi(\cos x-1)).$$

Quindi

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\tan(\pi\cos x)}{e^{x^2}-1}&=\lim_{x\to0}\frac{\tan(\pi(\cos x-1))}{e^{x^2}-1}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\tan(\pi(\cos x-1))}{\pi(\cos x-1)}\cdot\frac{\pi(\cos x-1)}{x^2}\cdot\frac{x^2}{e^{x^2}-1}.\end{aligned}$$

Dato che $\lim_{y\to0}\frac{e^y-1}{y}=1$, il limite vale

$$\lim_{x\to0}\frac{\pi(\cos x-1)}{x^2}=-\frac{\pi}{2}.$$

3. Si ha $(x^2)^{3/2}=(|x|^2)^{3/2}=|x|^3$, per cui

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-|x|^3+(x^2)^{3/2}}{3x^3-\sin(x^3)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{3x^3-\sin(x^3)}=\frac{1}{3}.$$

4. In base e il limite diventa $\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\log\left(\frac{1}{x}\right)}{\log x}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{-\log x}{\log x}}=e^{-1}$.

5. Scriviamo $(1-7x)^{\log x}=e^{\log x\log(1-7x)}$ e notiamo che

$$\lim_{x\to0+}\log x\log(1-7x)=\lim_{x\to0+}7x\log x\frac{\log(1-7x)}{7x}=-\lim_{x\to0+}7x\log x=0.$$

Quindi

$$\lim_{x\to0+}\frac{(1-7x)^{\log x}-1}{(e^{2x}-1)\log(x^3)}=\lim_{x\to0+}\frac{e^{\log x\log(1-7x)}-1}{\log x\log(1-7x)}\cdot\frac{\log x}{\log x^3}\cdot\frac{\log(1-7x)}{(-7x)}\cdot\frac{2x}{e^{2x}-1}\cdot\frac{-7}{2}.$$

Si ha
$$\lim_{x\to 0+}\frac{e^{\log x\log(1-7x)}-1}{\log x\log(1-7x)}=\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}=1,\qquad \frac{\log x}{\log x^3}=\frac{1}{3},$$
$$\lim_{x\to 0+}\frac{\log(1-7x)}{(-7x)}=\lim_{y\to 0}\frac{\log(1+y)}{y}=1$$
$$\lim_{x\to 0+}\frac{2x}{e^{2x}-1}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{e^y-1}=1,$$
per cui il limite vale $-7/6$.
Alternativamente: Usando il linguaggio degli *o piccolo*, si può scrivere, ricordando che $e^y=1+y+o(y)$, che
$$(1-7x)^{\log x}=e^{\log x\log(1-7x)}=1+\log x\log(1-7x)+o(\log x\log(1-7x)).$$
Dato che $\log(1+y)=y+o(y)$, si ha $\log(1-7x)=-7x+o(x)$, e
$$(1-7x)^{\log x}=1-7x\log x+o(x\log x).$$
Inoltre, $e^{2x}=1+2x+o(x)$, per cui
$$(e^{2x}-1)\log(x^3)=(2x+o(x))3\log x=6x\log x+o(x\log x),$$
Quindi il limite ha la forma
$$\lim_{x\to 0+}\frac{-7x\log x+o(x\log x)}{6x\log x+o(x\log x)}=-\frac{7}{6}.$$

6. Cambiando variabile $y=2/x$ si ha $\lim\limits_{y\to 0+}2\cdot\dfrac{\log(1+y)}{y}=2.$

7. Dato che $9<<7e^{x-1}\le 7e^{x+\sin x}$ e $23<<15e^x$, il limite è uguale a
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{7e^{x+\sin x}}{15e^x}=\frac{7}{15}\lim_{x\to+\infty}e^{\sin x},$$
che non esiste.

8. Scriviamo
$$\frac{\sin(4^x-1)}{2^{\sin x}-1}=\frac{\sin(4^x-1)}{4^x-1}\cdot\frac{4^x-1}{2^{\sin x}-1}$$
$$=\frac{\sin(4^x-1)}{4^x-1}\cdot\frac{e^{x\log 4}-1}{x\log 4}\cdot\frac{2\sin x\log 2}{e^{\sin x\log 2}-1}\cdot\frac{x}{\sin x},$$
per cui (usando i limiti fondamentali) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\sin(4^x-1)}{2^{\sin x}-1}=2.$
Alternativamente: usiamo che $\sin y=y+o(y)$ e $e^y=1+y+o(y)$. Dato che $4^x=e^{x\log 4}=1+x\log 4+o(x\log 4)=x\log 4+o(x)$, si ha
$$\sin(4^x-1)=4^x-1+o(4^x-1)=x\log 4+o(x);$$
inoltre, dato che $2^{\sin x}=e^{\sin x\log 2}=1+\sin x\log 2+o(\sin x\log 2)=\sin x\log 2+o(x)=x\log 2+o(x)$, si ha
$$2^{\sin x}-1=x\log 2+o(x\log 2)=x\log 2+o(x),$$
per cui il limite vale
$$\lim_{x\to 0}\frac{x\log 4+o(x)}{x\log 2+o(x)}=\frac{\log 4}{\log 2}=2.$$

Il limite che permette di trattare limiti al finito in cui è presente un'esponenziale è

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Questo limite si ottiene subito dal precedente, scrivendo

$$e^x - 1 = y, \qquad x = \log(1+y),$$

per cui

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\log(1+y)} = 1.$$

Esempio. Se $a > 0$ allora

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a.$$

Infatti, basta scrivere

$$a^x = e^{x \log a},$$

e usare la sostituzione $y = x \log a$.

Esempio. Calcoliamo

$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2}.$$

Il limite è nella forma $1^{+\infty}$. Per ricondurlo ad una forma nota, riscriviamo la funzione in base e

$$(\cos x)^{1/x^2} = e^{\log(\cos x)/x^2}.$$

Dato che e^y è continua e

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2} = -\frac{1}{2},$$

il limite vale $e^{-1/2}$.

Nota. Abbiamo usato l'uguaglianza

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\log f(x)},$$

che si usa spesso per trattare le forme esponenziali quando la base è una funzione.

Esempio. Per calcolare

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$$

scriviamo la funzione come

$$e^{\frac{\sin x}{x-\sin x}\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)}.$$

Con il cambio di variabili

$$\frac{\sin x}{x} - 1 = y,$$

si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{\frac{\sin x}{x} - 1}\lim_{y\to 0}\frac{\log(1+y)}{y} = 1,$$

quindi

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x-\sin x}\log\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x-\sin x}\left(\frac{\sin x}{x} - 1\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x-\sin x}\cdot\frac{\sin x - x}{x} = -\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = -1,$$

e il limite vale e^{-1}.

CONFRONTI TRA FUNZIONI

Quando si ha una somma di più funzioni di cui si vuole calcolare il limite in un punto x_0 la 'strategia' è di individuare la funzione 'dominante' e isolarla da quelle 'trascurabili'.

Esempio. Per calcolare

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^4+x^3+5}{6x^4+2x^2+x},$$

si nota che sia al nmeratore che al denominatore l'andamento 'dominante' è quello di x^4 per cui lo si isola:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4(3+\frac{1}{x}+5\frac{1}{x^4})}{x^4(6+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3})}=\frac{1}{2}.$$

In questo passaggio abbiamo usato il fatto che x^3, $2x^2$, x e 5 sono 'trascurabili rispetto a x^4', ovvero divise per x^4 tendono a 0 (sono infinitesime).

Introduciamo ora una notazione per esprimere questo concetto di confronto tra comportamenti di funzioni.

Def. Diciamo che g è un *o piccolo* di f per $x\to x_0$ se si ha

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)}=0.$$

In tal caso si scrive $g=o(f)$ (per $x\to x_0$).

Questo concetto verrà usato nel seguente modo: se $g=o(f)$ allora (h è un'altra funzione)

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)+g(x)}{h(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{h(x)}$$

(ovvero g si può 'trascurare'). Per convincersene, basta scrivere

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)+g(x)}{h(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)\Big(1+\frac{g(x)}{f(x)}\Big)}{h(x)}.$$

Operazioni sugli o piccolo

(1) $o(f)+o(f) = o(f)$ (ovvero: se sommiamo due funzioni trascurabili rispetto a f otteniamo ancora una funzione trascurabile rispetto a f)
(2) $o(o(f)) = o(f)$ (se una funzione è trascurabile rispetto ad una funzione trascurabile rispetto ad f, è trascurabile rispetto ad f)
(3) $g{\cdot}o(f) = o(fg)$ (se moltiplico una funzione trascurabile rispetto ad f per g ottengo una funzione trascurabile rispetto a fg)
(4) $o(f + o(f)) = o(f)$, ecc.

Nota: (a) $g = o(1)$ equivale a g infinitesima;

(b) a volte scriveremo $g << f$ invece di $g = o(f)$ (e a volte leggeremo 'f è molto più grande di g' (per $x \to x_0$)).

Esempio. Dai limiti fondamentali otteniamo (per $x \to 0$):

$$\sin x = x + o(x); \qquad \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2);$$

$$e^x = 1 + x + o(x); \qquad \log(1+x) = x + o(x),$$

ecc.

Confronti tra 'infiniti' I limiti all'infinito calcolati per le successioni ci danno un certo numero di confronti per $x \to +\infty$:

$$1 << \log x << x^\beta << a^x$$

per ogni $a > 1$ e $\beta > 0$. Per dimostrare queste relazioni basta ricondursi agli analoghi limiti per successione tramite la funzione parte intera.

Esempio. Per calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x + x\log x + \sin x^2}{x + x\log x + 4^{-x}}$$

notiamo che

$$\sin x^2 \leq 1 << x\log x << 2^x$$

e

$$4^{-x} << x << x\log x,$$

quindi (eliminando le funzioni trascurabili) il limite è

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{x\log x} = 0$$

(per esempio perchè $x\log x << x^2 << 2^x$).

Esempi.

(1) $\lim_{x\to 0^+} x\log x = 0$ (per provarlo basta porre $y = 1/x$);

(2) $\lim_{x\to 0^+} x^x = 1$ (per provarlo basta scrivere

$$x^x = e^{x\log x});$$

(3) $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^x - 1}{x} = -\infty$. Per provarlo basta calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x\log x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x\log x} - 1}{x\log x} \cdot \log x = \lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty.$$

LIMITI DI FUNZIONI CON DOMINIO QUALSIASI

Def. Sia $A \subseteq \mathbf{R}$; diremo che $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$ è un *punto di accumulazione* per A se per ogni intorno I di x_0 si ha $I \cap A \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$. Un punto di A che non sia un punto di accumulazione per A si dice un *punto isolato* di A.

ESEMPI: 1) $A = \{(1/n) : \ n \in \mathbf{N}, \ n \neq 0\}$. 0 è l'unico punto di accumulazione per A. Inoltre A è composto solo di punti isolati. 2) I punti di accumulazione per $\mathbf{Z}$ sono $+\infty$ e $-\infty$. Naturalmente, anche $\mathbf{Z}$ è composto solo di punti isolati.

Def. Sia $f : A \to \mathbf{R}$ e x_0 di accumulazione per A. Allora diciamo che $f(x)$ tende a $L \in [-\infty, +\infty]$ per $x \to x_0$ (e scriviamo ancora $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$) se per ogni intormo J di L esiste un intorno I di x_0 tale che se $x_0 \neq x \in I \cap A$, allora $f(x) \in J$.

NOTA: questa definizione può venire riscritta con la terminologia degli ε e δ, distinguendo i vari casi. Per esempio se $x_0, L \in \mathbf{R}$ $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ significa che

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall x \neq x_0 : \ x \in dom f$ e $|x - x_0| \leq \varepsilon$, si ha $|f(x) - L| < \delta$

(PER ESERCIZIO: riscrivere i vari casi).

ESEMPI: 1) ogni successione è una funzione con dominio $\mathbf{N}$, e quindi $+\infty$ è l'unico punto per cui si possa applicare questa definizione (che naturalmente coincide con la solita definizione di limite di una successione). 2) $A = \{(1/n) : \ n \in \mathbf{N}, \ n \neq 0\}$, $f : A \to \mathbf{R}$ sia data da $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$ per $x \in A$. Allora si ha $\lim_{x \to 0} f(x) = e$.

Teorema. (UNICITÀ) *Sia x_0 di accumulazione per $dom f$. Se $f(x) \to L$ e $f(x) \to L'$ per $x \to x_0$, allora $L = L'$*

Dim. (supponiamo x_0, L e L' numeri reali) Supponiamo $L \neq L'$. Sia $\frac{|L-L'|}{2} > \varepsilon > 0$. Allora $\exists\, \delta > 0$: $x_0 \neq x \in dom f$ e $|x - x_0| \leq \delta \implies |f(x) - L| \leq \varepsilon$, ed esiste $\delta' > 0$: $x_0 \neq x \in dom f$ e $|x - x_0| \leq \delta' \implies |f(x) - L'| \leq \varepsilon$. Quindi $x \neq x_0$ e $|x_0 - x| \leq \min\{\delta, \delta'\}$ si ha $|L - L'| \leq |L - x| + |x - L'| \leq 2\varepsilon < |L - L'|$. Assurdo. $\square$

PER ESERCIZIO: dimostrare il teorema negli altri casi, anche usando la definizione mediante intorni.

Andamenti asintotici

Al finito: sia $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ $(a, b \in \mathbf{R})$.

1. Se esiste il limite

$$\lim_{x \to a+} f(x) = L$$

allora diremo che f *è estendibile con continuità* (da destra) in a: la funzione

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (a, b) \\ L & x = a \end{cases}$$

è *continua a destra* in a.

Analogamente si definisce l'estendibilità (da sinistra) in b

Esempi. (a) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ è estendibile con continuità (sia da destra che da sinistra) in 0, ovvero la funzione

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è *continua* in 0.
(b) $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{|x|}$ è estendibile con continuità da destra in 0, ma non da sinistra.

2. Se esiste il limite

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \pm\infty$$

allora diremo che la retta verticale $x = a$ è un *asintoto verticale* per f (analogamente in b)

Esempi. (a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, o $f(x) = -\log |x|$, ha $x = 0$ come asintoto verticale e $f(x) \to +\infty$ per $x \to 0$;

(b) $f(x) = \frac{1}{x}$ ha $x = 0$ come asintoto verticale ma non ne esiste il limite in 0;
(c) $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{|x|}$ ha $x = 0$ come asintoto verticale, ma solo il limite sinistro è $+\infty$.

3. Se $f : (a, b) \cup (b, c) \to \mathbf{R}$ ed esistono i limiti

$$\lim_{x \to b-} f(x) \neq \lim_{x \to b+} f(x),$$

entrambi in $\mathbf{R}$, allora si dice che b è un *punto di salto* per f. Notiamo che in questo caso f è estendibile con continuità in b sia da destra che da sinistra.

Esempi. (a) $f(x) = \operatorname{sign} x$ ha $x = 0$ come punto di salto;
(b) $f(x) = [x]$ ha $x = 0$ come punto di salto;
(c) $f(x) = \arctan(1/x)$ ha $x = 0$ come punto di salto.

All'infinito: $f : (a, +\infty) \to \mathbf{R}$ (le stesse considerazioni valgono se $f : (-\infty, b) \to \mathbf{R}$).

Diciamo che f e g sono *asintotiche* (per $x \to +\infty$) se si ha

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - g(x) = 0.$$

Esempi. (a) $\log(x^3 + \sin x)$ è asintotica a $3 \log x$ per $x \to +\infty$ (ma per esempio $e^{x^3 + \sin x}$ **non** è asintotica a e^{x^3}));
(b) $x + \frac{\sin e^x}{x}$ è asintotica a x per $x \to +\infty$ (notare che questa funzione oscilla sempre di piu' quando $x \to +\infty$);
(c) $x + \arctan x$ è asintotica a $x + \pi/2$ per $x \to +\infty$ e a $x - \pi/2$ per $x \to +\infty$.

Il caso in cui g è una costante o una funzione affine è particolarmente semplice, e merita una notazione separata.

Def. Diremo che la retta $y = L$ è *asintoto orizzontale* per f (per $x \to +\infty$) se f è asintotica alla costante L, o, semplicemente

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L.$$

Def. Sia $m \neq 0$; diremo che la retta $y = mx+q$ è *asintoto obliquo* per f (per $x \to +\infty$) se f è asintotica alla funzione $g(x) = mx+q$.

In questo caso abbiamo $f(x) - mx - q = o(1)$, da cui (dividendo per x)

$$m = \frac{f(x)}{x} - \frac{q}{x} + \frac{1}{x}o(1) = \frac{f(x)}{x} + o(1),$$

mentre $q = f(x) - mx = o(1)$. Dunque si ha la seguente 'ricetta' per il calcolo di asintoti orizzontali/obliqui:
(1) si calcola il limite di $f(x)$. Se esiste finito ($= L$) questo da' l'asintoto orizzontale;
(2) se il limite è $\pm\infty$, allora si calcola il limite di $f(x)/x$. Se questo è infinito o non esiste, allora non c'e' asintoto. Se è finito il suo valore m ci da' il *coefficiente angolare* dell'asintoto;
(3) si calcola il limite di $f(x) - mx$. Se questo è finito allora il suo valore q da' il *termine noto* dell'asintoto

Esempio. Sia $f(x) = \log(7^x + 15x - 8)$. Il limite a $+\infty$ è $+\infty$, quindi non c'e' asintoto orizzontale. Calcoliamo il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\Bigl(7^x\Bigl(1 + \frac{15x}{7^x} - \frac{8}{7^x}\Bigr)\Bigr)}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log 7^x + \log\Big(1 + \frac{15x}{7^x} - \frac{8}{7^x}\Big)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\log 7 + o(1)}{x} = \log 7.$$

Dunque $m = \log 7$ e

$$q = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - x\log 7) = \lim_{x\to+\infty} \log\Big(1 + \frac{15x}{7^x} - \frac{8}{7^x}\Big) = 0.$$

quindi l'asintoto obliquo è $x\log 7$.

Esempio. Sia $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 4\log(1 + x^3)}$. Notiamo che per $x \to +\infty$

$$f(x) = |x|\sqrt{1 + \frac{2}{x} + 4\frac{\log(1 + x^3)}{x^2}} = x(1 + o(1)) = x + o(x).$$

Allora

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x + o(x)}{x} = 1,$$

e

$$q = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 4\log(1 + x^3)} - x)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x + 4\log(1 + x^3)}{\sqrt{x^2 + 2x + 4\log(1 + x^3)} + x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x + 4\log(1 + x^3)}{2x + o(1)} = 1.$$

Quindi l'asintoto obliquo è $y = x + 1$.

Esempio. Sia $f(x) = x + \log x$. Questa funzione evidentemente non ammette asintoti a $+\infty$, anche se il calcolo da':

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} (1 + \frac{\log x}{x}) = 1.$$

In questo caso pero' $q = +\infty$.

Funzioni continue

Def. f si dice **continua** se è continua in ogni punto del suo dominio.
NOTA: se il dominio contiene *punti isolati* (ovvero punti che non sono di accumulazione, come per esempio tuuti i punti di $\mathbf{N}$) allora la funzione è continua in ogni punto isolato (per definizione).
NOTA: polinomi, esponenziali, funzioni trigonometriche sono continue. $x \mapsto \frac{1}{x}$ è continua (con dominio $\mathbf{R} \setminus \{0\}$), $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ è continua (con dominio $\mathbf{R} \setminus \{0\}$).
NOTA: essere f continua su un intervallo si può pensare come una proprietà del grafico "che può essere tracciato senza staccare la penna dal foglio". Questa proprietà vaga viene resa più precisa dai seguenti teoremi, che non dimostreremo

Teorema. (di Weierstrass). *Ogni funzione reale continua in un intervallo chiuso e limitato ha massimo e minimo.*
Corollario. Ogni funzione continua su un intervallo chiuso e limitato è limitata.

NOTA. La continuità è essenziale: la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in (0,1) \\ \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 0 \text{ o } x = 1 \end{cases}$$

non ammette max/min in $[0, 1]$ (dove non è continua), ne' in $(0, 1)$ (dove è continua).

Teorema. (di Bolzano o "degli zeri") *Sia* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *una funzione continua tale che* $f(a)f(b) < 0$. *Allora esiste almeno un punto* $x \in]a, b[$ *tale che* $f(x) = 0$.

NOTA. Questo teorema afferma una cosa 'naturale' per una curva 'tracciata senza staccare la penna dal foglio': se il punto iniziale sta sopra l'asse delle x e quello finale sotto, ad un certo punto la curva deve attraversare l'asse delle x.

Esempio. Sia P un polinomio di grado 3. Allora l'equazione $P(x) = 0$ ha almeno una soluzione.

Infatti, a meno di dividere per il coefficiente di x^3 se $P(x) = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ si ha $P(x) \to \pm\infty$ per $x \to \pm\infty$. Quindi esiste M tale che $f(-M) < 0$ e $f(M) = 0$. Possiamo quindi applicare il teorema con $a = -M$ e $b = M$.

NOTAZIONE: se $f : A \to B$ è una funzione e $C \subseteq A$, allora definiamo $f(C) = \{f(x) : \ x \in C\} \subseteq B$. In particolare $f(dom f)$ si chiama anche l'*immagine* di f $(im f)$.

Teorema. ("dei valori intermedi") *Sia I intervallo, e $f : I \to \mathbf{R}$ continua, allora $f(I)$ è intervallo*

Dim. Dobbiamo mostrare che se $x, y \in f(I)$ e $x < z < y$, allora $z \in f(I)$.

Siano $c, d \in I$ tali che $f(c) = x$, $f(d) = y$. Allora possiamo considerare la funz. $g(x) = f(x) - z$ sull'intervallo $[a, b] = [\min\{c, d\}, \max\{c, d\}]$. Si ha allora $g(a)g(b) < 0$ e g è continua. Per il teorema di Bolzano $\exists\ x \in]a, b[$: $g(x) = 0$, ovvero $f(x) = z$.

I intervallo $\Longrightarrow x \in I \Longrightarrow z \in f(I)$. $\square$

NOTA. Questo teorema ci dice che per provare che l'equazione $f(x) = y$ ha soluzione, nel caso di f continua e definita su un intervallo chiuso e limitato, allora basta verificare che $\min f \leq y \leq \max f$.

Esempio. Proviamo che esiste un mumero $x > 0$ tale che

$$e^x = \frac{1}{x}.$$

Questo problema si risolve con una 'risoluzione grafica': vicino allo 0 il grafico di e^x 'sta sotto' a quello di $1/x$, verso $+\infty$ la situazione si capovolge, quindi ci deve essere un punto in cui i grafici si intersecano... in questo ragionamento stiamo usando in verità la continuità delle funzioni come nel teorema degli zeri.

Per applicare il teorema degli zeri, consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x} - e^x.$$

Dato che $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ esiste $a > 0$ tale che $f(a) > 0$; dato che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, esiste $b > a$ tale che $f(b) < 0$. A questo punto il teorema degli zeri ci assicura che esiste $x \in (a, b)$ tale che $f(x) = 0$, che è quello che volevamo.

Esempio. Trovare (se esiste) il

$$\min\Bigl\{\log\Bigl(3 + \Bigl|e^x - \frac{1}{x}\Bigr|\Bigr) : x > 0\Bigr\}.$$

Per quello che abbiamo visto sopra, esiste un punto in cui la quantità nel modulo si annulla, per cui il minimo è ottenuto in questo punto e vale $\log 3$.

INVERSIONE DI FUNZIONI CONTINUE

RICORDIAMO: Se A, B sono insiemi e $f : A \to B$ è una funzione iniettiva, ovvero $a_1 \neq a_2 \Longrightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$, allora la relazione $g(b) = a \iff f(a) = b$ definisce una funzione $g : imf \to A$ (imf l'immagine di f). Questa funzione g si chiama la *funzione inversa* di f e viene denotata con f^{-1}. Una funzione iniettiva si dice anche *invertibile*.

Esempi. (1) arcsin : $[-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ è l'inversa del seno (o meglio della sua restrizione a $[-\pi/2, \pi/2]$);

(2) arctan : $\mathbf{R} \to [-\pi/2, \pi/2]$ è l'inversa della tangente (o meglio della sua restrizione a $[-\pi/2, \pi/2]$);

(3) $\log_a : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$ è l'inversa di a^x ($a > 0$, $a \neq 1$).

Teorema. *Siano I un intervallo e $f : I \to \mathbf{R}$ una funzione continua. Allora f è invertibile $\iff$ f è strettamente monotona. In tal caso $domf^{-1}$ è un intervallo e f^{-1} è continua*

In particolare, arcsin, arctan, log sono funzioni continue.

NOTA. L'implicazione f strettamente monotona $\Rightarrow$ f invertibile è sempre valida (anche quando f non è continua).

Sia la continuità che il fatto che I sia intervallo sono essenziali. Infatti ci sono funzioni continue (non definite su intervalli) invertibili ma non strettamente monotone. Per esempio:

$$f(x) = \frac{1}{x} : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R} \setminus \{0\},$$

che è l'inversa di se stessa.

Ci sono anche funzioni definite su intervalli (non continue) invertibili ma non strettamente monotone. Ne costruiamo facilmente una:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in (-1, 1), \\ -x & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Anche questa è l'inversa di se stessa.

Cognome e nome: ________________________________

Analisi Matematica I (Ing. Informatica & Automazione) - Prima Prova Intermedia (24-10-2002)

Risposta esatta: 3 punti, errata: -0.5 punti, vuota: 0 punti. Fila: 1

1. L'estremo inferiore dell'insieme $\left\{\dfrac{3}{2-e^{1/x}} : x < 0\right\}$ è

$\boxed{A}$: -1 $\boxed{B}$: 1 $\boxed{C}$: 3 ● : $\frac{3}{2}$ $\boxed{E}$: 0

2. Il minimo dell'insieme $\left\{(\cos x)^2 : \sin x < \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right\}$ è

$\boxed{A}$: $\frac{1}{3}$ $\boxed{B}$: $\frac{1}{4}$ ● : 0 $\boxed{D}$: $\frac{1}{2}$ $\boxed{E}$: non esiste

3. Il dominio della funzione $f(x) = \dfrac{\arcsin(x+\frac{1}{5})}{\arccos(\frac{1}{3}-x)}$ è

● : $(-\frac{2}{3}, \frac{4}{5}]$ $\boxed{B}$: $[-\frac{2}{3}, \frac{4}{5}]$ $\boxed{C}$: $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{5})$ $\boxed{D}$: $[-\frac{4}{5}, \frac{2}{3})$ $\boxed{E}$: $[-\frac{4}{5}, \frac{2}{3}]$

4. Il limite $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{(x+4)^7+|x|^7}{(x+4)^6+|x|^6}$ vale $\boxed{A}$: 24 ● : 14 $\boxed{C}$: 0 $\boxed{D}$: $+\infty$ $\boxed{E}$: 4

5. Il limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{5^n+n}{2^n-n} - \frac{5^n-n}{2^n+n}\right)$ vale

$\boxed{A}$: 2 $\boxed{B}$: 0 $\boxed{C}$: $-\infty$ $\boxed{D}$: 10 ● : $+\infty$

6. Il $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x - \sqrt{x^2+4x\sin x+\log(3+x^5)}$ vale

$\boxed{A}$: -4 ● : non esiste $\boxed{C}$: 4 $\boxed{D}$: 5 $\boxed{E}$: -2

7. Il limite $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\log(\cos x+e^{6x})-\log 2}{(x+1)^4-1}$ vale $\boxed{A}$: 1 $\boxed{B}$: $\frac{1}{2}$ ● : $\frac{3}{4}$ $\boxed{D}$: $\frac{3}{2}$ $\boxed{E}$: $\frac{3}{2}$

8. Il limite $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sin(\pi 4^x)}{\sin(4^{\pi x}-1)}$ vale ● : -1 $\boxed{B}$: $\log 4$ $\boxed{C}$: 0 $\boxed{D}$: $-\log 5$ $\boxed{E}$: π

9. Il limite $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{(4x+1)^{3/x}}{(5x+1)^{2/x}}$ vale $\boxed{A}$: e^{-9} $\boxed{B}$: 1 ● : e^2 $\boxed{D}$: 0 $\boxed{E}$: e^{12}

10. Il limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n!-(4n)^n}{4n-n^{3n}}$ vale $\boxed{A}$: 1 $\boxed{B}$: $-\infty$ $\boxed{C}$: $+\infty$ $\boxed{D}$: $\frac{1}{2}$ ● : 0

11. L'asintoto della funzione $f(x) = \dfrac{6x^2-x}{x+1} + \dfrac{\arctan x}{\pi}$ per $x \to +\infty$ è $\boxed{y = 6x - \frac{13}{2}}$

$\boxed{A}$: $\boxed{B}$: $\boxed{C}$: $\boxed{D}$: $\boxed{E}$:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
D	C	A	B	E	B	C	A	C	E	

Soluzioni

1. Si ha

$$\left\{\frac{3}{2-e^{1/x}} : x<0\right\} = \left\{\frac{3}{2-e^{y}} : y<0\right\} = \left\{\frac{3}{2-z} : 0<z<1\right\}$$
$$= \left\{\frac{3}{w} : 1<w<2\right\} = \left(\frac{3}{2}, 3\right),$$

per cui l'inf cercato è $3/2$.

2. Dato che il minimo della funzione $(\cos x)^2$ su $\mathbf{R}$ è 0 ed è assunto per $x = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), e $\sin(-\pi/2) = -1 < 1/\sqrt{2}$, il minimo cercato è ancora 0.

Alternativamente, si nota che basta limitarsi all'insieme

$$\left\{\sin x < \frac{1}{\sqrt{2}} : -\pi \le x \le \pi\right\} = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7}{4}\pi\right]$$

su cui il minimo di $\cos^2 x$ è 0.

3. Dato che il dominio di arcsin e di arccos è $[-1,1]$, il dominio di f è l'intersezione degli insiemi

$$A = \left\{x \in \mathbf{R} :\ x + \frac{1}{5} \in [-1,1]\right\} = \left[-\frac{6}{5}, \frac{4}{5}\right]$$

e

$$B = \left\{x \in \mathbf{R} : \frac{1}{3} - x \in [-1,1],\ \arccos\left(\frac{1}{3} - x\right) \ne 0\right\}$$
$$= \left\{x \in \left[-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right] : \frac{1}{3} - x \ne 1\right\} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right].$$

Dunque il dominio è

$$\left[-\frac{6}{5}, \frac{4}{5}\right] \cap \left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right] = \left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{5}\right].$$

4. Dato che per $x \le 0$ si ha $|x| = -x$, e, usando lo sviluppo del binomio,

$$(x+4)^7 + |x|^7 = x^7 + 7\cdot 4x^6 + o(x^6) + (-x)^7 = x^7 + 28x^6 + o(x^6) - x^7 = 28x^6 + o(x^6),$$

$$(x+4)^6 + |x|^6 = x^6 + o(x^6) + (-x)^6 = 2x^6 + o(x^6),$$

il limite vale

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{28x^6 + o(x^6)}{2x^6 + o(x^6)} = 14.$$

5. Sviluppando la funzione in parentesi, il limite diventa

$$\lim_n \frac{1}{n} \cdot \frac{2n(5^n + 2^n)}{4^n - n^2} = \lim_n 2\frac{5^n}{4^n} = 2\lim_n \left(\frac{5}{4}\right)^n = +\infty.$$

6. Moltiplicando e dividendo per $x + \sqrt{x^2 + 4x\sin x + \log(3 + x^5)}$, si ottiene il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - (x^2 + 4x\sin x + \log(3 + x^5))}{x + \sqrt{x^2 + 4x\sin x + \log(3 + x^5)}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-4x\sin x - \log(3 + x^5)}{x + \sqrt{x^2 + 4x\sin x + \log(3 + x^5)}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-4x\sin x - \log(3 + x^5)}{2x + o(x)} = \lim_{x\to+\infty} -2\sin x - \frac{\log(3 + x^5)}{2x} = \lim_{x\to+\infty} -2\sin x,$$

che *non esiste*.

7. Usando lo sviluppo del binomio

$$(1 + x)^4 = 1 + 4x + o(x),$$

e le proprietà dei logaritmi, la funzione nel limite si può riscrivere

$$\frac{\log\left(\frac{\cos x + e^{6x}}{2}\right)}{4x + o(x)} = \frac{\log\left(1 + \frac{\cos x + e^{6x} - 2}{2}\right)}{4x + o(x)}.$$

Usando il limite

$$\lim_{y\to 0} \frac{\log(1 + y)}{y} = 1,$$

si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log\left(1 + \frac{\cos x + e^{6x} - 2}{2}\right)}{4x + o(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\cos x + e^{6x} - 2}{2}}{4x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x + e^{6x} - 2}{8x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{8x} + \lim_{x\to 0} \frac{e^{6x} - 1}{8x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{6x} - 1}{8x} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

Nell'ultima riga abbiamo usato i limiti

$$\lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1, \qquad \lim_{y\to 0} \frac{1 - \cos y}{y^2} = \frac{1}{2}.$$

8. Dato che $\sin y = \sin(\pi - y)$, il limite si scrive

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi(1-4^x))}{\sin(4^{\pi x}-1)} = \lim_{x\to 0} \frac{\pi(1-4^x)}{4^{\pi x}-1}$$

$$= -\pi \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\log 4}-1}{e^{\pi x \log 4}-1} = -\pi \lim_{x\to 0} \frac{x\log 4}{\pi x \log 4} = -1.$$

9. Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} (1+4x)^{3/x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{3}{x}\log(1+4x)} = e^{12},$$

dato che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{3}{x}\log(1+4x) = 12$$

Analogamente si ha

$$\lim_{x\to 0^+} (1+5x)^{2/x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{2}{x}\log(1+5x)} = e^{10},$$

quindi

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(1+4x)^{3/x}}{(1+5x)^{2/x}} = \frac{e^{12}}{e^{10}} = e^2.$$

10. Dato che $n << n! << n^n$, i termini $6n$ e $n!$ si possono eliminare. Il limite diventa

$$-\lim_n \frac{(4n)^n}{n^{3n}} = -\lim_n \frac{4^n n^n}{n^{3n}} = -\lim_n \frac{4^n}{n^{2n}} = 0.$$

11. Si ha

$$\frac{6x^2 - x}{x+1} = \frac{6x^2 + 6x - 7x - 7 + 7}{x+1} = 6x - 7 + \frac{7}{x+1}.$$

Dunque la funzione si scrive

$$f(x) = 6x - 7 + \frac{\arctan x}{\pi} + \frac{7}{x+1}.$$

Tenendo conto che $\arctan x \to \pm\pi/2$ per $x \to \pm\infty$, gli asintoti a $\pm\infty$ sono

$$y = 6x - 7 \pm \frac{1}{2},$$

ovvero

$$y = 6x - \frac{13}{2}, \qquad y = 6x - \frac{15}{2}.$$

Derivate

Def. Sia f una funzione reale di variabile reale. Allora, dati $x, y \in dom f$ con $x \neq y$, si definisce il *rapporto incrementale* di f tra x e y come

$$P_f(x,y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$

OSSERVAZIONI:

i) f è non decrescente $\Longleftrightarrow$ P_f è non negativa;

ii) f è strettamente crescente $\Longleftrightarrow$ P_f è strettamente positiva;

iii) se $f(x) = mx + q$ è affine allora P_f è il coefficiente angolare m.

Def. Sia I intervallo, $f : I \to \mathbf{R}$ e x_0 un punto di I. Se esiste il limite

$$\lim_{x \to x_0} P_f(x, x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \overline{\mathbf{R}},$$

esso viene chiamato la *derivata* di f nel punto x_0 e si indica con $f'(x_0)$. Se $f'(x_0) \in \mathbf{R}$ allora f si dice *derivabile* in x_0.

ALTRE NOTAZIONI per $f'(x_0)$:

$$Df(x_0),\ \frac{d}{dx}f(x_0),\ \frac{dy}{dx},\ y'$$

Def. Sia I intervallo, $f : I \to \mathbf{R}$ e x_0 un punto di I. Se esiste il limite

$$\lim_{x \to x_0-} P_f(x, x_0) = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \overline{\mathbf{R}},$$

esso viene chiamato la *derivata sinistra* di f nel punto x_0 e si indica con $f'_-(x_0)$.

Se esiste il limite

$$\lim_{x\to x_0+} P_f(x,x_0) = \lim_{x\to x_0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in \overline{\mathbf{R}},$$

esso viene chiamato la *derivata destra* di f nel punto x_0 e si indica con $f'_+(x_0)$.

ESEMPI: 1) $f = c$ costante $Dc = 0$ in ogni punto. Infatti per ogni coppia di punti $P_f(x,y) = 0$.

2) $f(x) = x$. Allora $P_f(x,y) = 1$ per ogni coppia di punti, per cui $f'(x) = 1$ per ogni x.

3) $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$). Allora

$P_f(x,y) = x^{n-1}+x^{n-2}y+\ldots+xy^{n-2}x+y^{n-1}$, per cui $f'(x) = nx^{n-1}$.

4) $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Allora ($x \neq 0$) $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{(1/x)-(1/x_0)}{x-x_0}$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{(x_0-x)/(x_0x)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} -\frac{1}{x_0x} = -\frac{1}{x_0^2}.$$

5) $f(x) = |x|$. Sia $x_0 > 0$; allora

$P_f(x,x_0) = \dfrac{|x|-|x_0|}{x-x_0} = \dfrac{x-x_0}{x-x_0} = 1$ per tutti gli $x > 0$, per cui $f'(x_0) = 1$. Se invece $x_0 < 0$,

$P_f(x,x_0) = \dfrac{|x|-|x_0|}{x-x_0} = \dfrac{-x-(-x_0)}{x-x_0} = -1$ per tutti gli $x < 0$, per cui $f'(x_0) = -1$.

Se $x_0 = 0$ si ha $P_f(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0, \\ -1 & \text{se } x < 0, \end{cases}$

per cui $f'_-(x_0) = -1$ e $f'_+(x_0) = 1$; in particolare non esiste $f'(x_0)$.

Riassumendo

$$D|x| = \frac{x}{|x|} = \frac{|x|}{x}.$$

6) $f(x) = sgn(x)\sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x \geq 0 \\ -\sqrt{|x|} & \text{se } x < 0 \end{cases}$. Allora

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty,$$

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0-} \frac{-\sqrt{|x|} - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0-} \frac{1}{\sqrt{|x|}} = +\infty.$$

Quindi $f'(0) = +\infty$, e f non è derivabile in 0.

7) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$. Allora

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{1 - 1}{x - 0} = 0;$$

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0-} \frac{0 - 1}{x - 0} = +\infty.$$

Differenziabilità

Def. Sia I intervallo, $f : I \to \mathbf{R}$ e $x_0 \in I$. Diciamo che f è *differenziabile* in x_0 quando esiste $\lambda \in \mathbf{R}$ tale che si abbia

$$f(x) = f(x_0) + \lambda(x - x_0) + o(x - x_0) \text{ per } x \to x_0$$

SIGNIFICATO GEOMETRICO: la retta $y = f(x_0) + \lambda(x - x_0)$ approssima la curva $y = f(x)$ "ad un ordine superiore a $x - x_0$" (questa retta è *tangente* alla curva).

Teorema. *f differenziabile in $x_0 \iff f$ derivabile in x_0. In tal caso $\lambda = f'(x_0)$.*

Dim. $f(x) = f(x_0) + \lambda(x - x_0) + o(x - x_0)$ per $x \to x_0$

$$\iff \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \lambda(x - x_0)}{x - x_0} = 0 \iff$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lambda. \qquad \square$$

Teorema. *f derivabile in $x_0 \Longrightarrow f$ continua in x_0.*

Dim. Se $f(x) = f(x_0) + \lambda(x - x_0) + o(x - x_0)$ per $x \to x_0$, allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x_0) + \lambda(x - x_0) = f(x_0). \qquad \square$$

Calcolo di derivate

Dal teorema di linearità per i limiti si ha subito:

Teorema. (LINEARITÀ) *Sia I intervallo e x_0 punto interno a I. Se $f, g : I \to \mathbf{R}$ sono derivabili in x_0 e $c \in \mathbf{R}$, allora sono derivabili in x_0 anche $f + g$ e cf e si ha*

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0), \quad (cf)'(x_0) = c(f'(x_0)).$$

Teorema. (DERIVATA DI COMPOSIZIONE) *Siano I e J intervalli; $f : I \to \mathbf{R}$, $g : J \to \mathbf{R}$ x_0 un punto interno a I tale che $f(x_0)$ è interno a J. Se f è derivabile in x_0 e g è derivabile in $f(x_0)$, allora $g \circ f$ è derivabile in x_0, e si ha*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0).$$

Dim. Sia $y_0 = f(x_0)$. Dalla differenziabilità di g in y_0 si ha $g(y) = g(y_0) + g'(y_0)(y - y_0) + o(y - y_0)$, per $y \to y_0$. In particolare per $y = f(x)$ e $x \to x_0$ si ha $g(f(x)) = g(y_0) + g'(y_0)(f(x) - y_0) + o(f(x) - y_0)$, ovvero

$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x_0) + g'(y_0)(f(x) - y_0) + o(f(x) - y_0)$. Dalla differenziabilità di f abbiamo

$$f(x) - y_0 = f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \text{ e dunque}$$

$$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x_0)$$

$$+ g'(y_0)(f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)) + o(f'(x_0)(x - x_0))$$

$= (g \circ f)(x_0) + g'(y_0)f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$

Questo mostra che $(g \circ f)$ è differenziabile in x_0 e la sua derivata è $g'(y_0)f'(x_0)$. $\square$

ESEMPI: 1) $n \in \mathbf{N}$ $D(x^{-n}) = -nx^{-n-1}$. La funzione $x \mapsto x^{-n}$ si può considerare come composizione delle funzioni $f(x) = x^n$ e $g(y) = 1/y$; e sappiamo che $f'(x) = nx^{n-1}$, $g'(y) = -1/y^2$. Dunque

$$D(x^{-n}) = g'(f(x))\, f'(x) = -\frac{1}{(x^n)^2}\,(nx^{n-1}) = -nx^{-n-1};$$

2) $D\Big(\dfrac{1}{f}\Big) = -\dfrac{1}{f^2}\, f'$ (considerare $\dfrac{1}{f}$ come composizione di f e $1/y$).

Teorema. (DERIVATA DEL PRODOTTO) *Siano $f, g : I \to \mathbf{R}$ derivabili in $x_0 \in I$; allora anche fg è derivabile in x_0, e si ha*

$$(fg)'(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0).$$

Dim. $(fg)(x) - (fg)(x_0) = f(x)(g(x) - g(x_0)) + g(x_0)(f(x) - f(x_0))$, per cui

$$P_{fg}(x, x_0) = f(x)P_g(x, x_0) + g(x_0)P_f(x, x_0).$$

Passando al limite per $x \to x_0$ (ricordando che $f(x) \to f(x_0)$) si ha la tesi. $\square$

ESERCIZI:1) $\Big(\dfrac{f}{g}\Big)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$. (Applicare la derivazione del prodotto di f e $1/g$ ricordando che $D(g^{-1}) = -g^{-2}g'$).

Teorema. (DERIVAZIONE DELLA FUNZIONE INVERSA) *Sia I intervallo e $f : I \to \mathbf{R}$ continua e invertibile in I. Se esiste $f'(x_0)$, allora esiste anche la derivata di f^{-1} nel punto $y_0 = f(x_0)$, e si ha*

$$D\big(f^{-1}\big)(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \qquad \textit{ovvero}$$

$$\big(f^{-1}\big)'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

NOTA: 1) l'ipotesi di invertibilità su f equivale alla stretta monotonia;

2) la formula per la derivata dell'inversa vale anche se $f'(x_0) = 0$ o $f'(y_0) = \pm\infty$, applicando le dovute convenzioni.

3) se $f'(x_0) \neq 0$, allora f^{-1} è derivabile in $f(x_0)$.

Dim. si ha $\displaystyle\lim_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$

$$= \lim_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(y_0))}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)},$$

per il teorema sul limite di composizione. □

ESEMPIO: calcoliamo la derivata di e^x. Si ha

$$\lim_{x\to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} e^{x_0}\Big(\frac{e^{(x-x_0)} - 1}{x - x_0}\Big) = e^{x_0}.$$

Dunque $De^x = e^x$.

Ora possiamo calcolare la derivata di $\log x$, usando il teorema della der. della funz. inversa, con $f(x) = e^x$, $f^{-1}(x) = \log x$. Si ha allora $D(\log x) = D(f^{-1})(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \dfrac{1}{\exp(\log x)} = \dfrac{1}{x}$.

ESERCIZI:1) $D(\log f) = \dfrac{f'}{f}$;

2) $D(e^f) = e^f\, f'$;

3) $D(x^\alpha) = D(e^{(\alpha \log x)}) = x^\alpha D(\alpha \log x) = \alpha x^{\alpha-1}$ $(\alpha \neq 1)$.

Derivate delle funzioni elementari

$$D(e^x) = e^x, \qquad D1 = 0$$
$$(\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\}) \qquad D(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1},$$
$$D\cos x = -\sin x \qquad D\sin x = \cos x$$

e quindi anche

$$D\tan x = 1 + \tan^2 x$$
$$D\cosh x = \sinh x \qquad D\sinh x = \cosh x,$$

dove

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

sono *coseno e seno iperbolico.*

OSSERVAZIONI: dal limite fondamentale $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$ si deduce

$$\sin x = x + o(x) \qquad \cos x = 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + o(x^2),$$

da cui si ottiene subito la derivata di sin e cos. Per esempio si ha

$$\begin{aligned} D\sin x &= \lim_{t\to 0} \frac{\sin(x+t) - \sin x}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\sin x \cos t + \sin t \cos x - \sin x}{t} \\ &= \cos x \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} + \sin x \lim_{t\to 0} \frac{\cos t - 1}{t} \\ &= \cos x + \sin x \lim_{t\to 0} \Big(\frac{t}{2} + o(t)\Big) = \cos x. \end{aligned}$$

ESEMPI: 1) $D(\sin 2x) = (\cos 2x)\,2$;

2) $D(\log\cos x) = \dfrac{1}{\cos x}\,(-\sin x) = -\dfrac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$;

3) calcolare la derivata di $(\log x)^{\sqrt{x}}$ $(x > 1)$: possiamo scrivere

$$(\log x)^{\sqrt{x}} = \exp\Big(x^{1/2}\log(\log x)\Big).$$

Si ha

$$D\Big(x^{1/2}\log(\log x)\Big) = \log(\log x)Dx^{1/2} + x^{1/2}D\log(\log x).$$

Dato che

$Dx^{1/2} = \dfrac{1}{2}x^{-1/2} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ e $D\log(\log x) = \dfrac{1}{\log x}\,\dfrac{1}{x}$, si ha dunque

$$\begin{aligned} D\Big(x^{1/2}\log(\log x)\Big) &= \log(\log x)\frac{1}{2\sqrt{x}} + x^{1/2}\frac{1}{x\log x} \\ &= \frac{\log x\ \log(\log x) + 2}{2\sqrt{x}\ \log x}, \end{aligned}$$

e infine

$$\begin{aligned} D(\log x)^{\sqrt{x}} &= \exp\Big(x^{1/2}\log(\log x)\Big)\frac{\log x\ \log(\log x) + 2}{2\sqrt{x}\ \log x} \\ &= (\log x)^{(\sqrt{x}-1)}\,\frac{\log x\ \log(\log x) + 2}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

ESERCIZIO: verificare la formula generale per la derivata di f^g:

$$D\big(f^g\big) = f^g\big(\frac{f'g}{f} + g'\log f\big).$$

(scrivere $f^g = \exp(g\log f)$...)

La funzione derivata

Def. Sia $f : I \to \mathbf{R}$ una funzione tale che

$$I' = \{x \in I : \ f \text{ è derivabile in } x\} \neq \emptyset,$$

allora si chiama *derivata di* f la funzione $f' : I' \to \mathbf{R}$, $x \mapsto f'(x)$ che associa ad ogni punto $x \in I'$ la derivata di f in x.

ESEMPI: 1) $f(x) = x$, $\mathrm{dom}\, f = \mathrm{dom}\, f' = \mathbf{R}$; $f' = 1$;
2) $f(x) = |x|$, $\mathrm{dom}\, f' = \mathbf{R} \setminus \{0\} \neq \mathrm{dom}\, f = \mathbf{R}$; $f' = \dfrac{x}{|x|}$;
3) $f(x) = sgn(x)\,\sqrt{|x|}$ $\mathrm{dom}\, f' \neq \mathrm{dom}\, f = \mathbf{R}$ in quanto $0 \notin \mathrm{dom}\, f'$.
4) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $\mathrm{dom}\, f = \mathrm{dom}\, f' = \mathbf{R} \setminus \{0\}$; $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

Punti di non derivabilità

NOTA: se la funzione f *non* è derivabile in un punto x_0 si possono presentare vari casi. Se f è continua in x_0 allora si usa la seguente nomenclatura:

1) $\exists\ f'_-(x_0), f'_+(x_0) \in \overline{\mathbf{R}}$ e almeno uno dei due è finito. Allora x_0 si dice un *punto angoloso.* **Esempi**: $(x_0 = 0)$ $f(x) = |x|$, $f(x) = \sqrt{x + |x|}$;
2) $\exists\ f'(x_0) = \pm\infty$; allora x_0 si dice un *punto di flesso a tangente verticale.* **Esempi**: $(x_0 = 0)$ $f(x) = \sqrt[3]{x}$ (l'inversa di x^3), $f(x) = sgn(x)\,\sqrt{|x|}$;
3) $f'_-(x_0), f'_+(x_0) \in \{+\infty, -\infty\}$ $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$; allora x_0 si dice una *cuspide.* **Esempi**: $(x_0 = 0)$ $f(x) = \sqrt{|x|}$

NOTA: possono anche non esistere $f'_-(x_0)$ e $f'_+(x_0)$; per esempio si prenda $f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$ e $x_0 = 0$.

Esercizi. Descrivere i punti di discontinuità delle seguenti funzioni.

1. $f(x) = |\log|x||$.

Dato che $\log|x|$ è derivabile ovunque (nel suo dominio), e $|y|$ non è derivabile in $y = 0$, la composizione PUÒ non essere derivabile solo per $\log|x| = 0$, ovvero per $|x| = 1$, cioè $x = \pm 1$. Si ha

$$f'_-(\pm 1) = -1, \qquad f'_+(\pm 1) = 1,$$

quindi questi due sono punti angolosi.

2. $f(x) = \sqrt{|x^3 + x^2|}$.

Dato che $x^3 + x^2$ è derivabile ovunque (nel suo dominio), e $\sqrt{|y|}$ non è derivabile in $y = 0$, la composizione può non essere derivabile solo per $x^3 + x^2 = 0$, ovvero per $x = 0$ e $x = -1$.

Si ha

$$f'_\pm(-1) = \lim_{x\to -1\pm} \frac{\sqrt{x^2|x+1|}}{x+1} = \lim_{y\to 0\pm} \frac{|y-1|\sqrt{|y|}}{y} = \pm\infty,$$

e quindi -1 è un punto di cuspide.

Si ha

$$f'_\pm(0) = \lim_{x\to 0\pm} \frac{\sqrt{x^2|x+1|}}{x-0} = \lim_{x\to 0\pm} \frac{|x|\sqrt{|x+1|}}{x} = \pm 1,$$

quindi 0 è punto angoloso. Notare che $\sqrt{|y|}$ ha un punto di cuspide, quindi: *non si può dedurre il tipo di non-derivabilità di una composizione sapendo solo i tipi di non-derivabilità delle funzioni separatamente.*

3. $f(x) = \sqrt{|\sin x|}$.

Si ha

$$f'_{\pm}(0) = \lim_{x\to 0\pm} \frac{\sqrt{|\sin x|}}{x} = \pm\infty,$$

e analogamente ogni punto della forma $k\pi$, quindi tutti questi sono punti di cuspide.

4. $f(x) = \sqrt{1 - \cos x}$.

Si ha

$$f'_{\pm}(0) = \lim_{x\to 0\pm} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{x} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}},$$

e analogamente ogni punto della forma $2k\pi$, quindi tutti questi sono punti angolosi.

5. $f(x) = |\sin x||x + x^2|$ nel'intervallo $[-2, 2]$.

La funzione $|\sin x|$ ha un punto angoloso in 0 e la funzione $|x + x^2|$ ha due punti angolosi in 0 e -1, quindi i possibili punti di non derivabilità sono 0 e -1.

Si ha

$$f'_{\pm}(-1) = \lim_{x\to -1\pm} \frac{|\sin x||x+x^2|}{x+1} = \sin 1 \lim_{x\to -1\pm} \frac{|x+1|}{x+1} = \pm\sin 1,$$

quindi $x = -1$ è punto angoloso.

Si ha

$$f'_{\pm}(0) = \lim_{x\to 0\pm} \frac{|\sin x||x+x^2|}{x} = \lim_{x\to 0\pm} \frac{|\sin x||x|}{x} = \lim_{x\to 0\pm} \frac{|\sin x|}{|x|} x = 0,$$

e quindi f è derivabile in 0. Dunque $x = 0$ non è un punto di non derivabilità anche se lo era per entrambe le funzioni $|\sin x|$ e $|x + x^2|$.

Il Teorema di De L'Hôpital

Teorema. *Siano* $f, g : I \to \mathbf{R}$ *funzioni definite e derivabili in un intorno destro* I *di* $x_0 \in [-\infty, +\infty[$. *Supponiamo che sia verificata una delle due condizioni:*

i) (forma $0/0$*)* $\lim_{x\to x_0+} f(x) = \lim_{x\to x_0+} g(x) = 0$*;*

ii) (forma ∞/∞*)* $\lim_{x\to x_0+} f(x) = \lim_{x\to x_0+} g(x) = \infty$

Se esiste il limite

$$\lim_{x\to x_0+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

allora esiste anche il limite

$$\lim_{x\to x_0+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Le stesse conclusioni sono valide per il limite $x \to x_0-$ *(se* f, g *sono definite in un intorno sinistro di* $x_0 \in]-\infty, +\infty]$*).*

ESEMPI: tramite questo teorema possiamo ritrovare la maggior parte dei limiti notevoli:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = (\frac{0}{0}) = (H) = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1;$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = (\frac{0}{0}) = (H) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1;$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = (\frac{0}{0}) = (H) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x+1} = 1;$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x} = (\frac{+\infty}{+\infty}) = (H) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = +\infty;$$

$$(\alpha > 0) \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = (\frac{+\infty}{+\infty}) = (H) = \lim_{x\to +\infty} \frac{1/x}{\alpha x^{\alpha-1}}$$
$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0;$$

$\lim_{x\to 0} x \log|x| = \lim_{x\to 0} \frac{\log|x|}{1/x} = (\frac{-\infty}{+\infty}) = (H) = \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0.$

Il Teorema di De L'Hôpital può semplificare il calcolo di limiti complicati:

$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\sin x^2 + \cos x)}{x^2} = (\frac{0}{0}) = (H) =$

$\lim_{x\to 0}(\frac{2x\cos x^2 - \sin x}{\sin x^2 + \cos x})\frac{1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\cos x^2 - \sin x}{2x} =$

$\lim_{x\to 0} \cos x^2 - \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$

Attenzione però a non "eccedere" nell'uso: il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^5 x}{x^5}$$

è banalmente uguale a 1 (applicando il limite fondamentale e la continuità di y^5); si può anche risolvere usando solo il teorema di De L'Hôpital , ma si deve derivare 5 volte:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^5 x}{x^5} = (H)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{5\sin^4 x\cos x}{5x^4} = (H)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{4\sin^3 x\cos^2 x - \sin^5 x}{4x^3} = (H)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{12\sin^2 x\cos^3 x - 8\sin^4 x\cos x - 5\sin^4 x\cos x}{12x^2} = \dots$$

Attenzione anche al fatto che se non esiste il limite del rapporto delle derivate allora non è detto che non esista il limite del rapporto delle funzioni: evidentemente, prendendo $f(x) = x + \sin x$ e

$g(x) = x$, si ha

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{\sin x}{x} = 1,$$

ma invece

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to +\infty} 1 + \cos x$$

non esiste.

Foglio di esercizi - 1 novembre 2002

1. Sia $f(x) = \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.
(a) notare che f è strettamente crescente;
(b) calcolare la derivata di f^{-1} (l'inversa di sinh, che viene chiamata *settore seno iperbolico*) usando la relazione $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

2. Posto $f(0) = 0$, calcolare la derivata destra in $x = 0$ di

$$f(x) = \frac{\sqrt{x + 4x^2} - \sqrt{\tan x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{x}}.$$

3. Calcolare la retta tangente al grafico di

$$f(x) = \frac{1}{3 - x} - \big|\log|x - 3|\big|$$

per $x = 0$.

4. Posto $f(0) = 0$, calcolare derivata destra e sinistra della funzione

$$f(x) = x \arctan \frac{1}{x}$$

in $x = 0$.

5. Descrivere i punti di non derivabilità della funzione

$$f(x) = |\sin x| \sqrt{1 - \cos x}$$

6. Descrivere i punti di non derivabilità della funzione

$$f(x) = \arcsin \frac{x}{3} + \sqrt{|x - 1|}$$

7. Calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\log(1 + x^2) - 2x^2 \cos(x\sqrt{2})}{7x^4 \sin(x^2)}$$

8. Calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0+} \frac{e^{\arctan x} + \log\left(\frac{1-x}{e}\right)}{x \sin^2 x}$$

1. (a) La funzione e^x è crescente. La funzione e^{-x} è decrescente, quindi $-e^x$ è crescente, dunque sinh è somma di funzioni crescenti e quindi crescente.

(b) Usiamo la formula per la derivata della funzione inversa:

$$Df^{-1}(x) = \frac{1}{f'\Big(f^{-1}(x)\Big)}.$$

Si ha

$$f'(y) = \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \cosh y,$$

ed inoltre (dalla relazione $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$)

$$\cosh y = \sqrt{1 + \sinh^2 y} = \sqrt{1 + (f(y))^2}.$$

Dunque, sostituendo nella formula

$$Df^{-1}(x) = \frac{1}{f'\Big(f^{-1}(x)\Big)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \Big(f\Big(f^{-1}(x)\Big)\Big)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

2. Dobbiamo calcolare

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{x + 4x^2} - \sqrt{\tan x}}{x(\sqrt{\sin x} + \sqrt{x}}.$$

Usando il limite fondamentale $\sin x/x$ abbiamo $\sqrt{\sin x} = \sqrt{x} + o(\sqrt{x})$, quindi

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{x + 4x^2} - \sqrt{\tan x}}{x(\sqrt{\sin x} + \sqrt{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{x + 4x^2} - \sqrt{\tan x}}{2x\sqrt{x}}.$$

Moltiplicando e dividendo per $\sqrt{x + 4x^2} + \sqrt{\tan x}$ abbiamo

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x + 4x^2 - \tan x}{2x\sqrt{x}(\sqrt{x + 4x^2} + \sqrt{\tan x})}.$$

Dato che $\sqrt{x + 4x^2} = \sqrt{x} + o(\sqrt{x})$ e $\sqrt{\tan x} = \sqrt{x} + o(\sqrt{x})$, si ha

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x + 4x^2 - \tan x}{2x\sqrt{x}(2\sqrt{x})} = \lim_{x\to 0+} \frac{x + 4x^2 - \tan x}{4x^2} = 1 + \lim_{x\to 0+} \frac{x - \tan x}{4x^2}.$$

Quest'ultimo limite possiamo risolverlo usando la regola di De L'Hopital:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x - \tan x}{4x^2} = (\mathrm{H}) = \lim_{x\to 0+} \frac{1 - (1 + \tan^2 x)}{8x} = -\lim_{x\to 0+} \frac{\tan^2 x}{x} \cdot x = 0.$$

Dunque il limite cercato è 1.

3. La funzione in 0 vale

$$f(0) = \frac{1}{3} - \log 3.$$

Vicino a 0 (per esempio in $(-1, 1)$) la funzione si scrive

$$\frac{1}{3 - x} - \log|x - 3|,$$

la cui derivata è

$$\frac{1}{(x-3)^2} - \frac{1}{x-3} = \frac{4-x}{(x-3)^2};$$

in 0

$$f'(0) = \frac{4}{9}.$$

La retta tangente è data da

$$y = f(0) + f'(0)(x-0) = \frac{4}{9}x + \frac{1}{3} - \log 3.$$

4. Dobbiamo calcolare

$$\lim_{x\to 0\pm} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0\pm} \arctan\frac{1}{x} = \lim_{y\to\pm\infty} \arctan y = \pm\frac{\pi}{2}.$$

5. Dato che la funzione è periodica di periodo 2π, basta esaminarla in $(-\pi,\pi]$. I 'candidati' punti di non derivabilità sono quelli in cui $\sin x = 0$ oppure $1-\cos x =$, ovvero 0 e π. Calcoliamo in questi punti derivata destra e sinistra: in 0

$$f'_\pm(0) = \lim_{x\to 0\pm} \frac{|\sin x|}{x}\sqrt{1-\cos x} = \lim_{x\to 0\pm} \frac{|\sin x|}{|x|}\frac{|x|}{x}\sqrt{1-\cos x} = \pm \lim_{x\to 0\pm} \sqrt{1-\cos x} = 0.$$

Dunque $f'_\pm(0) = 0$ e 0 non è punto di non derivabilità.

In $x = \pi$

$$f'_\pm(\pi) = \lim_{x\to \pi\pm} \frac{|\sin x|}{x-\pi}\sqrt{1-\cos x} = \sqrt{2}\lim_{x\to \pi\pm} \frac{|\sin x|}{x-\pi} = \sqrt{2}\lim_{y\to 0\pm} \frac{|\sin y|}{y} = \pm\sqrt{2}$$

(abbiamo usato il fatto che $|\sin x|$ è periodica di periodo π), e quindi π è punto angoloso.

6. La funzione $\arcsin y$ ha derivata

$$\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

e quindi non è derivabile in $y = \pm 1$, dove la derivata è infinita. Nella f questo corrisponde ai punti in cui $\frac{x}{3} = \pm 1$, ovvero $x = \pm 3$

La funzione $\sqrt{|y|}$ non è derivabile in 0 dove c'e' un punto di cuspide. Nella f questo corrisponde al punti in cui $x - 1 = 0$, ovvero $x = 1$

Il calcolo delle derivate di f non presenta difficoltà e si ottengono due punti con derivata infinita per $x = \pm 3$ e un punto di cuspide per $x = 1$.

7. Si veda la soluzione dell'esercizio 6 (Esercizi di ripasso sui limiti).

8. Si veda la soluzione dell'esercizio 13 (Esercizi di ripasso sui limiti), che è solo leggermente più complicato.

Il Teorema di Lagrange o del Valor Medio

Abbiamo visto che molte proprietà importanti delle funzioni (crescenza, decrescenza, iniettività, ecc.) si esprimono tramite proprietà del rapporto incrementale (positività, negatività, non annullarsi, ecc.), e quindi si riflettono su proprietà della derivata. Il seguente teorema ci permette di 'tornare indietro' e dedurre da proprietà della derivata alcune proprietà del rapporto incrementale.

Teorema. (del valor medio, o di Lagrange) *Sia* $f : [x_1, x_2] \to \mathbf{R}$ *una funzione continua in* $[x_1, x_2]$ *e derivabile in* (x_1, x_2)*. Allora esiste almeno un punto* $x \in (x_1, x_2)$ *tale che*

$$f'(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Il significato geometrico del teorema è il seguente: dato che $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ è la pendenza della secante al grafico di f per i punti del grafico relativi a x_1, x_2 (ovvero il 'valor medio' della pendenza del grafico di f tra x_1 e x_2) e $f'(x)$ è la pendenza della tangente al grafico in x, il teorema afferma che esiste un punto x in cui la pendenza della retta tangente è il valor medio della pendenza del grafico di f tra x_1 e x_2, ovvero che esiste un punto x in cui la tangente al grafico è parallela alla secante al grafico per i punti estremi.

Osservazioni. Vediamo che nessuna delle ipotesi del teorema può essere omessa

(1) La funzione f deve essere continua in $[x_1, x_2]$, altrimenti ci può non essere alcuna relazione tra il rapporto incrementale agli

estremi e la derivata all'interno di $[x_1, x_2]$: per esempio prendiamo $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ e la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ x & \text{se } x \in (0, 1]. \end{cases}$$

La funzione è discontinua in 0. Si ha

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{1 - 1}{1 - 0} = 0,$$

ma $f'(x) = 1$ per ogni $x \in (0, 1)$; quindi la tesi del teorema è falsa;

(2) La funzione f deve essere derivabile in *ogni* punto di (x_1, x_2). Prendiamo $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ e $f(x) = |x|$. La funzione f è derivabile dappertutto tranne che in 0. Questo basta a far fallire il teorema:

$$\frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{1 - 1}{1 - (-1)} = 0,$$

ma $f'(x) = \pm 1$ dove x è derivabile;

(3) Il dominio deve essere un intervallo. Se consideriamo la funzione $\frac{1}{x}$ definita per $x \neq 0$, si ha, prendendo $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$

$$\frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{1 - (-1)}{1 - (-1)} = 1,$$

ma la derivata di $\dfrac{1}{x}$ è $-\dfrac{1}{x^2}$ (sempre negativa!) e quindi la tesi del teorema non è verificata.

Nel caso particolare in cui $f(x_1) = f(x_2)$ allora la tesi diventa che esiste un punto $x \in (x_1, x_2)$ tale che $f'(x) = 0$. Questo caso particolare del teorema di Lagrange viene a volte chiamato Teorema di Rolle. Vediamo come si dimostra questo teorema, sostanzialmente usando il Teorema di Weierstrass (il teorema di Lagrange si dimostra in modo simile, solo risulta un po' più complicata la notazione)

Dim. Se $f =$ costante la tesi è ovvia. Supponiamo allora f non costante. Il Teorema di Weierstrass ci assicura l'esistenza di un punto di minimo x_m e di un punto di massimo x_M. Dato che f non è costante si ha $f(x_n) < f(x_M)$. Supponiamo che $x_m \not\in \{x_1, x_2\}$, allora dal fatto che $f(x_m) \le f(y)$ per ogni $y \in [x_1, x_2]$ deduciamo che

$$\frac{f(x_m) - f(y)}{x_m - y} \le 0 \text{ se } y < x_m$$

da cui $f'_-(x_m) \le 0$, e anche che

$$\frac{f(x_m) - f(y)}{x_m - y} \ge 0 \text{ se } y > x_m$$

da cui $f'_+(x_m) \ge 0$. Ma dato che f è derivabile in x_m si ha $f'(x) = f'_-(x_m) \le 0$ e $f'(x_m) = f'_+(x_m) \ge 0$, da cui $f'(x_m) = 0$. Se invece $x_m \in \{x_1, x_2\}$ allora $f(x_m) = f(x_1) = f(x_2)$, e quindi $x_M \not\in \{x_1, x_2\}$, si ripete il ragionamento (cambiando le diseguaglianze) e si conclude che $f'(x_M) = 0$.

Esercizio. Dimostrare il teorema di Lagrange applicando il teorema di Rolle alla funzione

$$g(x) = f(x) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Come corollario al teorema di Lagrange abbiamo il seguente risultato, che è importante tenere a mente.

Teorema. (della derivata nulla). *Sia $f' = 0$ su un intervallo I; allora f è costante su I*

Dim. Se f non è costante allora $\exists x_1, x_2 \in I$ tali che $x_1 < x_2$ e $f(x_1) \neq f(x_2)$. Allora per il teorema del valor medio esiste $x \in (x_1, x_2)$ tale che $f'(x) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \neq 0$, contro l'ipotesi.
$\square$

ESEMPIO: Sia $f(x) = \arctan x + \arctan(\frac{1}{x})$, definita per $x \neq 0$. Si ha

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^{-2}}\left(\frac{-1}{x^2}\right) = 0.$$

Non si può concludere però che f è costante sul suo dominio poichè esso non è un intervallo. Infatti

$$f(1){=}2\arctan 1 = \pi/2, \quad f(-1){=}2\arctan(-1) = -\pi/2.$$

Possiamo però applicare il teorema della derivata nulla sugli intervalli $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$ e concludere che

$$f(x) = \begin{cases} -\pi/2 & \text{se } x < 0 \\ \pi/2 & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

Monotonia e segno della derivata

Come conseguenza del teorema del valor medio otteniamo che se conosciamo il segno di f' su un intervallo possiamo conoscere il segno del rapporto incrementale sullo stesso intervallo e quindi dedurne la monotonia di f.

Teorema. *Sia f derivabile in $[a,b]$. Se $f' \geq 0$ (risp. $f' \leq 0$), allora f è non decrescente (risp. non crescente). Se $f' > 0$ (risp. $f' < 0$) allora f è strettamente crescente (risp. strettamente decrescente).*

Dim. ($f' > 0$) Siano $x_1, x_2 \in [a,b]$ con $x_1 < x_2$; per il Teorema del valor medio si ha che $\exists\, x \in (x_1, x_2)$ tale che $f(x_2) - f(x_1) = f'(x)(x_2 - x_1) > 0$. □

Osservazione. Se f è non-decrescente allora il suo rapporto incrementale è non-negativo e quindi anche $f' \geq 0$, quindi possiamo dedurre che una funzione derivabile in un intervallo è non-descescente *se e solo se* $f' \geq 0$. Un enunciato analogo vale per le funzioni non-crescenti, ma se f è strettamente crescente non possiamo dedurre che $f' > 0$ in ogni punto: si consideri la funzione $f(x) = x^3$, che è strettamente crescente; la sua derivata è $f'(x) = 3x^2$ che si annulla in 0. Naturalmente in questo caso possiamo dedurre dal teorema che f è strettamente crescente in $(-\infty, 0)$ e in $(0, +\infty)$, e quindi lo è anche su tutto $\mathbf{R}$.

Studio della monotonia. Dal teorema precedente abbiamo il seguente procedimento:

1. Calcolare f';

2. Studiare il segno di f'. Individuare nel dominio di f' gli intervalli in cui $f' > 0$ e $f' < 0$;

3. Dedurre che in tali intervalli f è strettamente crescente o decrescente.

Esempio. Sia $f(x) = x^2 e^{-x}$. Allora:

1. $f'(x) = (2x - x^2)e^{-x} = x(2-x)e^{-x}$;

2. Si ha $f' > 0$ per $0 < x < 2$ e $f' < 0$ per $x < 0$ o $x > 2$;

3. Deduciamo che f è strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$ e in $(2, +\infty)$, strettamente crescente in $(0, 2)$.

NOTA: per verificare che non si sono fatti errori conviene controllare che le deduzioni sulla monotonia siano coerenti con i valori e i limiti della funzione agli estremi degli intervalli di monotonia. In questo caso, conviene verificare che

a. $\lim_{x\to-\infty} f(x) > f(0)$;

b. $f(0) < f(2)$;

c. $f(2) > \lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Queste condizioni sono presto verificate, traducendosi in

a. $+\infty > 0$; b. $0 < 4e^{-2}$; c. $4e^{-2} > 0$.

Esempio. Sia $f(x) = x \log |x|$. Allora:

1. $f'(x) = \log |x| + 1$;

2. Si ha $f' > 0$ per $x < -1/e$ o $x > 1/e$ e $f' < 0$ per $-1/e < x < 0$ o $0 < x < 1/e$;

3. Deduciamo che f è strettamente crescente in $(-\infty, -1/e)$ e in $(1/e, +\infty)$, strettamente decrescente in $(-1/e, 0)$ e $(0, 1/e)$.

NOTA: notare che entrambi gli esempi precedenti non sono deducibili semplicemente dalla conoscenza delle proprietà di monotonia delle funzioni elementari

Estremi relativi

Def. Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbf{R}$, $f : A \to \mathbf{R}$, $x_0 \in A$. Il punto x_0 si dice un *punto di massimo relativo* o un *punto di massimo locale* quando esiste un intorno I di x_0 tale che x_0 è punto di massimo per la restrizione di f a $I \cap A$; ovvero

$$\forall\, x \in A \cap I \text{ si ha } f(x) \leq f(x_0).$$

Analogamente diciamo che x_0 è un *punto di minimo relativo* o un *punto di minimo locale* quando esiste un intorno I di x_0 tale che x_0 è punto di minimo per la restrizione di f a $I \cap A$; ovvero

$$\forall\, x \in A \cap I \text{ si ha } f(x) \geq f(x_0).$$

Un punto si dice *di estremo relativo* o *di estremo locale* se è punto di massimo locale o di minimo locale.

NOTA: se x_0 è un punto di massimo per f su A, allora è anche punto di massimo relativo; se vogliamo distinguere le due cose si parlerà di *punto di massimo assoluto.*

ESEMPI: 1) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in [-1,1] \setminus \{0\} \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$. Allora $-1, 0, 1$ sono punti di massimo relativo; di questi 0 è punto di massimo assoluto;

2) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } |x| = 1 \\ 1/x^2 & \text{se } x \in]-1,1[\setminus\{0\} \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$. 0 è punto di minimo assoluto; 1 e -1 sono punti di massimo relativo ma non assoluto.

3) $f(x) = \cos x$; tutti i punti della forma $2k\pi$ sono punti di massimo assoluto, tutti i punti della forma $(2k+1)\pi$ sono punti di minimo assoluto;

4) $f(x) = [x]$ (parte intera). Tutti i punti $x \in \mathbf{R}$ sono punti di massimo relativo; tutti i punti $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$ sono punti di minimo relativo;

5) $f(x) = \sqrt{|x|}$. Il punto 0 è l'unico punto di minimo (assoluto e relativo); è anche un punto di cuspide;

6) $f(x) = \min\{|x|, |x-2|+1\}$. Il punto 0 è punto di minimo assoluto; il punto 2 è punto di minimo relativo. Notare che la funzione non è derivabile in 0 e 2.

7) $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se } x \leq -1 \\ -x & \text{se } -1 < x < 1 \\ x-2 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$. La funzione non ha punti di massimo e minimo assoluti. 1 è punto di minimo relativo; -1 è punto di massimo relativo.

Esercizio. Determinare i punti di estremo relativo della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2 & \text{se } x \notin \mathbf{Z} \\ x^4 & \text{se } x \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Questa funzione è ottenuta 'modificando' in punti isolati la funzione continua $4x^2$, che ha un unico punto di minimo relativo (e assoluto) $x = 0$. Notiamo che si ha

(a) $4x^2 < x^4 \iff x < -2$ o $x > 2$;

(b) $4x^2 > x^4 \iff -2 < x < 2$ e $x \neq 0$;

(c) $4x^2 x^4 \iff x = -2, 2$ o 0.

Dunque (caso (c)) la funzione non viene modificata vicino ai punti -2, 0 e 2, e dunque 0 continua ad essere un minimo relativo, mentre ± 2 non sono estremi relativi.

Nel caso (a) la funzione viene modificata nei punti $x_0 \in \mathbf{Z}$ con $x_0 < -2$ o $x_0 > 2$ e per tali x_0 si ha $f(x_0) > f(x)$ in un intorno di x_0, dato che $\lim_{x \to x_0} f(x) = 4x_0^2 < x_0^4 = f(x_0)$. Dunque questi x_0 sono punti di massimo relativo.

Nel caso (b) la funzione viene modificata nei punti $x_0 \in \mathbf{Z}$ con $-2 < x_0 < 2$, $x_0 \neq 0$ (ovvero $x_0 = \pm 1$) e per tali x_0 si ha $f(x_0) < f(x)$ in un intorno di x_0, dato che $\lim_{x \to \pm 1} f(x) = 4 > 1 = f(\pm 1)$. Dunque questi ± 1 sono punti di minimo relativo.

Riassumendo: $0, \pm 1$ sono i punti di minimo relativo per f; ± 3, ± 4, $\pm 5, \ldots$ sono i punti di massimo relativo.

Osservazione: nell'esercizio precedente abbiamo usato (per i punti ± 1) il seguente ragionamento: "se si ha

$$f(x_0) < \lim_{x \to x_0} f(x),$$

allora x_0 è un punto di minimo relativo."

Analogamente (per i punti $\pm 3, \pm 4, \ldots$): "se si ha

$$f(x_0) > \lim_{x \to x_0} f(x),$$

allora x_0 è un punto di massimo relativo."

Punti stazionari

Nel caso di funzioni derivabili e punti di estremo relativo interni, si è visto che la derivata deve annullarsi, ovvero la tangente essere orizzontale (parallela all'asse delle x). Conviene dare una definizione per quest'ultima proprietà.

Def. x_0 è *punto stazionario* di $f \iff f'(x_0) = 0$.

ESEMPI: 1) $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x \Longrightarrow 0$ è l'unico punto stazionario (e di minimo assoluto)

2) $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2 \Longrightarrow 0$ è l'unico punto stazionario (ma non è punto di estremo relativo);

3) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$ 0 è punto stazionario.

Teorema. *Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ e $x_0 \in (a, b)$ un punto di estremo relativo per f in cui esiste $f'(x_0)$; allora x_0 è punto stazionario di f.*

Dim. (x_0 punto di min. rel.) $\exists \delta > 0$ tale che se $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, allora $f(x) - f(x_0) \geq 0$. Quindi $P_f(x, x_0) \begin{cases} \leq 0 & \text{se } x_0 - \delta < x < x_0 \\ \geq 0 & \text{se } x_0 + \delta > x > x_0. \end{cases}$ Dunque passando al limite per $x \to x_0 \pm$ si ha $f'_-(x_0) \leq 0$, $f'_+(x_0) \geq 0$. Quindi deve essere $f'(x_0) = 0$. □

Questo teorema ci dà una "ricetta" per la ricerca di estremi (relativi) ma *solo in punti interni al dominio e in cui f è derivabile.*

NOTA: abbiamo dimostrato qualcosa di più:

"*Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ e $x_0 \in [a, b]$ un punto di estremo relativo per f in cui esistono le derivate destra e/o sinistra.*
(i) se x_0 è punto di minimo relativo allora $f'_-(x_0) \leq 0$, $f'_+(x_0) \geq 0$;
(ii) se x_0 è punto di massimo relativo allora $f'_-(x_0) \geq 0$, $f'_+(x_0) \leq 0$."

Esercizio. Verificare che queste condizioni sono soddisfatte dalle funzioni negli esempi sopra.

Eercizio. Trovare estremi relativi e punti stazionari di

$$f(x) = \arcsin\Big(\frac{x}{3}\Big) + \sqrt{|x-1|}.$$

In questo caso la funzione è definita in $[-3,3]$, la sua derivata è

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} + \frac{1}{2\sqrt{|x-1|}} \cdot \frac{x-1}{|x-1|}$$

definita per $x \in (-3,3)$, $x \neq 1$. Per $x > 1$ la derivata è strettamente positiva (somma di funzioni positive). Per $x < 1$ si scrive

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}},$$

e si ha $f' > 0$ se e solo se

$$2\sqrt{1-x} > \sqrt{9-x^2},$$

ovvero $4(1-x) > 9 - x^2$, cioè $x^2 - 4x - 5 = (x-5)(x+1) > 0$. Dunque $f' > 0$ se $-3 < x < -1$ o $1 < x < 3$ e $f' < 0$ per $-1 < x < 1$.

Dunque f ha due minimi relativi in $x = -3$ e $x = 1$, e due punti di massimo relativo in $x = -1$ e $x = 3$; inoltre f ha un solo punto stazionario ($x = -1$) (gli altri punti sono un punto di cuspide ($x = 1$) e due punti con $f' = +\infty$).

Lo studio di funzione

(informazioni deducibili da limiti e dalla derivata)

Possiamo riassumere parte di quello che abbiamo visto nelle ultime lezioni come un 'algoritmo' per studiare le proprietà (ed eventualmente tracciare un grafico approssimato) di una funzione f di cui si può calcolare la derivata.

1. Studio del dominio di f: suddivisione del dominio in intervalli. Semplificazione del dominio usando simmetrie (parità o disparità della funzione) o periodicità;

2. Andamento di f agli estremi degli intervalli di definizione: calcolo dei limiti e dei comportamenti asintotici;

3. Calcolo della derivata. Studio del dominio di f': suddivisione del dominio in intervalli;

4. Studio del segno della derivata. Individuazione degli intervalli di monotonia;

5. Classificazione di punti di discontinuità e di non-derivabilità; individuazione di estremi relativi ed assoluti.

Esempio. Studiamo la funzione $f(x) = \dfrac{x \log|x|}{x+1}$.

1. Dominio di $f = \{x \neq 0, -1\}$, che scriviamo come unione di intervalli: $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ e $(0, +\infty)$;

2. Calcolo dei limiti

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \log|x| = +\infty;$$

$$\lim_{x \to -1} f(x) = -\lim_{x \to -1} \frac{\log(-x)}{1+x}$$

$$= -\lim_{y\to -0} \frac{\log(1-y)}{y} = 1;$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\log|x|}{x+1} = \lim_{x\to 0} x\log|x| = 0;$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \log|x| = +\infty.$$

In particolare f è estendibile con continuità in -1 e 0.

Inoltre si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\log|x|}{1+x} - \log|x| = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-\log|x|}{1+x} = 0,$$

e quindi f è asintotica a $\log|x|$ per $x \to \pm\infty$;

3. Calcolo della derivata:

$$f'(x) = \frac{1+x+\log|x|}{(1+x)^2}.$$

Il dominio di f' è lo stesso di f;

4. Si ha $f' > 0$ se e solo se $\log|x|+x+1 > 0$. Per $x < 0$ la funzione $g(x) = \log|x| + x + 1$ ha derivata $g'(x) = \frac{1}{x} + 1$ da cui si deduce che g è crescente in $(-\infty, -1)$ e decrescente in $(-1, 0)$, quindi ha massimo in $x = -1$ e $g(-1) = 0$, quindi $f' = g < 0$ per $x < 0$ e $x \neq -1$;

Per $x > 0$ la diseguaglianza $f' > 0$ equivale a $\log|x| > -x-1$, che si risolve 'graficamente'. Usando il teorema degli zeri si ottiene che esiste un punto $\alpha \in (0, 1)$ in cui $f' = 0$ e tale che $f' < 0$ in $(0, \alpha)$ e $f' > 0$ in $(\alpha, +\infty)$.

Dunque: f è strettamente decrescente in $(-\infty, -1)$, in $(-1, 0)$ e in $(0, \alpha]$ (e la sua estensione per continuità è strettamente decrescente in $(-\infty, \alpha]$), e strettamente crescente in $[\alpha, +\infty)$;

5. Come abbiamo visto 0 e -1 sono punti di discontinuità eliminabile. La funzione non ha punti di non-derivabilità ed ha un solo punto di minimo assoluto α, che è anche il solo punto stazionario.

Estendendo f con continuità in -1 e 0, ponendo $f(0) = 0$ e $f(-1) = 1$, calcolando la derivata in questi due punti si ha:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\log|x|}{1+x} = \lim_{x\to 0} \log|x| = -\infty,$$

e quindi $x = 0$ diventa un punto a tangente verticale, mentre

$$f'(-1) = \lim_{x\to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{x\log|x| - x - 1}{(1+x)^2} = \text{(H)}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{\log|x|}{2(1+x)} = \text{(H)} = \lim_{x\to -1} \frac{1}{2x} = -\frac{1}{2},$$

e quindi anche la derivata si estende in -1 ed è diversa da 0.

Osservazioni.

(a) A volte il dominio di f', o la sua suddivisione in intervalli in cui $f' > 0$ o $f' < 0$, non si calcolano esplicitamente, ma i teoremi che abbiamo a disposizione ci aiutano a descriverli qualitativamente. Nell'esempio sopra abbiamo usato il teorema degli zeri per determinare il numero di intervalli in cui $f' > 0$;

(b) Nell'esempio precedente lo studio del segno di f' per $x < 0$ non può essere eseguito facilmente, ma dobbiamo studiare la funzione g (in sostanza: per studiare f dobbiamo studiare prima f').

Esercizio. Studiare la funzione

$$g(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{1+x^2},$$

e in seguito le funzioni

$$f(x) = x \arctan \frac{1}{x}$$

e

$$h(x) = (x-1) \arctan \frac{1}{|x-1|}.$$

(Suggerimento: notare che $f' = g$)

Derivate di ordini successivi

Def. Sia f derivabile sull'intervallo I. Se esiste la derivata della funzione $x \mapsto f'(x)$ in x, allora $(f')'(x)$ si dice la *derivata seconda* di f in x, e si denota con $f''(x)$ o $f^{(2)}(x)$.

Allo stesso modo si definiscono per induzione le derivate di ordine k: la funzione *derivata* 0-*ima* di f si definisce ponendo $f^{(0)} = f$; se è definita in ogni punto $x \in I$ la derivata k-ima $f^{(k)} \in \mathbf{R}$ e se ne esiste la derivata in un punto x_0, si definisce $f^{(k+1)}(x_0) = D(f^{(k)})(x_0)$.

Def. Sia I intervallo. Definiamo per ogni $k \in \mathbf{N}$ l'insieme $C^k(I)$ delle funzioni k volte derivabili su I tali che la derivata k-ima sia una funzione continua. Quindi:

$C^0(I)$ è l'insieme delle funzioni continue su I;

$C^1(I)$ è l'insieme delle funzioni derivabili su I la cui derivata è una funzione continua; ecc.

Si noti che valgono le inclusioni:

$$\ldots \subset C^2(I) \subset C^1(I) \subset C^0(I).$$

Definiamo inoltre lo spazio delle funzioni la cui derivata k-ima esiste per ogni $k \in \mathbf{N}$:

$$C^\infty(I) = \bigcap_{k \in \mathbf{N}} C^k(I).$$

NOTA: 1) le inclusioni sopra descritte sono strette. PER ESERCIZIO: fornire un esempio di funzione in $C^k(I)$ ma non in $C^{k+1}(I)$;

2) l'esistenza della derivata k-ima implica la continuità della derivata $k-1$-ima e quindi, per induzione, di tutte le precedenti;

3) i polinomi, gli esponenziali, i logaritmi, sin, cos,... sono funzioni C^∞. PER ESERCIZIO: calcolarne tutte le derivate;

4) dai teoremi di linearità delle derivate, si ha che per ogni k vale, per induzione, il teorema di linearità per funzioni di classe C^k.

5) se $f, g \in C^k(I)$, allora anche $fg \in C^k(I)$, e si ha

$$(fg)^{(k)} = \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} f^{(n)} g^{(k-n)};$$

6) composizione di funzioni C^k è ancora C^k.

Proprietà deducibili da f$''$

Vediamo per prima cosa un tipo di informazioni 'locali': noi sappiamo che se una funzione è derivabile in un punto x_0, lì il suo grafico è simile a quello di una retta. Se una funzione è derivabile due volte ci aspettiamo che il suo grafico sia simile a quello di una parabola, e se x_0 è un punto stazionario ci aspettiamo che il vertice della parabola sia proprio x_0, ovvero x_0 sia un massimo o minimo relativo.

Teorema. (criterio della radice seconda) *Sia $f \in C^1(I)$ e x_0 un punto stazionario di f. Se esiste $f''(x_0) > 0$ (risp. < 0), allora x_0 è un punto di minimo (risp. massimo) relativo per f.*

Dim. Si ha $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0$, quindi esiste, per il Teorema della permanenza del segno $\delta > 0$ tale che $\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \frac{f'(x)}{x - x_0} > 0$ per $0 < |x - x_0| < \delta$. Quindi per $x \in]x_0 - \delta, x_0[$ si ha $f'(x) < 0$, ovvero la funzione è decrescente in $]x_0 - \delta, x_0[$, mentre per $x \in]x_0, x_0 + \delta[$ si ha $f'(x) > 0$, ovvero la funzione è crescente in

$]x_0, x_0 + \delta[$. Questo mostra che $f(x_0) < f(x)$ per $0 < |x - x_0| < \delta$.
□

NOTA: questo teorema suggerisce un metodo per la ricerca di punti di estremo relativo per funzioni due volte derivabili. Attenzione però : la condizione è solo sufficiente (si consideri la funzione x^4 nel punto 0).

Def. Se x_0 è punto stazionario per f e f è monotona in un intorno di x_0, allora x_0 si dice un *punto di flesso a tangente orizzontale* (per esempio: $f(x) = x^3$ e $x = 0$).

Proposizione. *Se x_0 è un punto di flesso a tangente orizzontale ed esiste $f''(x_0)$, allora $f''(x_0) = 0$.*

Dim. f monotona $\Longrightarrow f' \geq 0$ (oppure ≤ 0) $\Longrightarrow x_0$ è un punto di minimo relativo (oppure massimo relativo) per $f' \Longrightarrow f''(x_0) = (f')'(x_0) = 0$. □

Vediamo ora come dallo studio di f'' si deducano anche delle informazioni 'globali', allo stesso modo in cui dallo studio della derivata prima si deducono informazioni sulla monotonia.

Def. Una funzione f definita su un intervallo si dice *convessa* se per ogni x, y e $t \in (0, 1)$ si ha

$$f(ty + (1 - t)x) \leq tf(y) + (1 - t)f(y)$$

(*diseguaglianza di convessità*). Se vale sempre la diseguaglianza oppost allora diremo che f è *concava*.
NOTA: il significato di questa diseguaglianza, letto sul grafico, è il seguente: al variare di t tra 0 e 1 il punto $z = ty + (1 - t)x$ prende tutti i valori tra x e y. Il valore $tf(y) + (1 - t)f(y)$ non

è altro che quello della retta secante il grafico nei punti relativi a x e y corrispondente a z. Quindi: una funzione è convessa se il segmento congiungente due punti del grafico non passa mai 'sotto il grafico'.

Esempi. (1) $f(x) = x^2$, $f(x) = |x|$ sono convesse (provarlo: basta osservare i grafici).

(2) $f(x) = x^3$, $f(x) = \sqrt{x}$ non sono convesse. Per la prima verificare che il segmento secante al grafico tra $x = -1$ e $x = 0$ sta sotto il grafico, per la seconda che il segmento secante al grafico tra $x = 0$ e $x = 1$ sta sotto il grafico;

(3) $f(x) = x^3$ non è ne' concava ne convessa. $f(x) = \sqrt{x}$ è concava.

NOTA: se f è derivabile, allora dire che f è convessa è equivalente a dire che f' è non decrescente. Si ha quindi il seguente criterio:

Teorema. (criterio di convessità) *Sia I intervallo e $f \in C^2(I)$. Allora f è convessa in I se e solo se $f'' \geq 0$, e f è concava in I se e solo se $f'' \leq 0$.*

Come per i punti in cui cambia la monotonia, è utile avere una notazione per i punti in cui f cambia da concava a convessa o viceversa.

Def. Diciamo che x_0 è un *punto di flesso* per f se f è derivabile in x_0 e se esiste un $\delta > 0$ tale che f è concava in $(x_0 - \delta, x_0)$ e convessa in $(x_0, x_0 + \delta)$, o viceversa.

NOTA: se x_0 è un punto di flesso ed esiste $f''(x_0)$ allora $f''(x_0) = 0$.

Esercizi.

1. Determinare gli intervalli su cui $f(x) = x^3+x^2$ è concava/convessa.

In questo caso la funzione è derivabile due volte, quindi la domanda si traduce in determinare gli intervalli in cui $f'' \geq 0$ e $f'' \leq 0$ rispettivamente.

Calcoliamo:

$$f'(x) = 3x^2 + 2x, \qquad f''(x) = 6x + 2 = 2(3x+1).$$

Dunque f è convessa su $[-1/3, +\infty)$ e concava su $(-\infty, -1/3]$. In particolare $x = 1/3$ è punto di flesso.

2. Determinare gli intervalli su cui $f(x) = e^{-x^2}$ è concava/convessa.

Ancora, la funzione è derivabile due volte, quindi la domanda si traduce in determinare gli intervalli in cui $f'' \geq 0$ e $f'' \leq 0$ rispettivamente.

Calcoliamo:

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}, \qquad f''(x) = e^{-x^2}(4x^2-2) = 2e^{-x^2}(2x^2-1).$$

Dunque

$$f''(x) \geq 0 \iff 2x^2 - 1 \geq 0,$$

e f è convessa in $(-\infty, -1/\sqrt{2}]$ e $[1/\sqrt{2}, +\infty)$ e concava sull'intervallo $[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$. In particolare $x = \pm 1/\sqrt{2}$ sono punto di flesso.

3. Determinare gli intervalli su cui $f(x) = 1 - |x-1|$ è convessa.

In questo caso la funzione non è derivabile due volte in 1, mentre la funzione è affine (e quindi sia concava che convessa) in $(-\infty, 1]$ e $[1, +\infty)$. Su tutto $\mathbf{R}$ la funzione è concava, quindi f è convessa su ogni intervallo che non contiene 0.

4. Caratterizzare tutti gli intervalli $[a, b]$ su cui

$$f(x) = \frac{x^2 + 7x + 50}{x^2 + 7x + 49}$$

è concava.

Notiamo che $x^2 + 7x + 49 > 0$ per ogni x e quindi la funzione è definita su tutto $\mathbf{R}$. Inoltre è derivabile due volte; quindi la funzione f è concava su un intervallo $[a, b]$ se e solo $f'' \leq 0$ su $[a, b]$.

Dopo aver semplificato

$$f(x) = \frac{x^2 + 7x + 50}{x^2 + 7x + 49} = 1 + \frac{1}{x^2 + 7x + 49},$$

calcoliamo:

$$f'(x) = -\frac{2x + 7}{(x^2 + 7x + 49)^2},$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2(2x + 7)^2 - 2(x^2 + 7x + 49)}{(x^2 + 7x + 49)^3} \\ &= 2 \cdot \frac{4x^2 + 28x + 49 - x^2 - 7x - 49}{(x^2 + 7x + 49)^3} \\ &= \frac{6}{(x^2 + 7x + 49)^3} \cdot (x^2 + 7x). \end{aligned}$$

Quindi

$$f''(x) \leq 0 \iff -7 \leq x \leq 0,$$

dunque f è concava in tutti gli intervalli $[a, b]$ contenuti in $[-7, 0]$.

5. Caratterizzare tutti gli intervalli $[a, b]$ su cui

$$f(x) = -\arctan |x - \pi|$$

è convessa.

Consideriamo preliminarmente la funzione $g(x) = \arctan x$, che è derivabile due volte. Si ha

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad g''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2},$$

quindi

$$g''(x) \geq 0 \iff x \leq 0,$$

ovvero g è convessa in $(-\infty, 0]$ e concava in $[0, +\infty)$.

Ne deduciamo quindi che la funzione $\arctan|x| = g(|x|)$ è concava sia in $(-\infty, 0]$ che in $[0, +\infty)$, ma non è concava in nessun intervallo che contenga 0 come punto interno, e quindi anche che la funzione $-\arctan|x| = -g(|x|)$ è convessa sia in $(-\infty, 0]$ che in $[0, +\infty)$, ma non è convessa in nessun intervallo che contenga 0 come punto interno.

Concludiamo che la funzione $f(x) = -g(|x-\pi|)$ è convessa in ogni intervallo $[a, b]$ contenuto in $(-\infty, \pi]$ o in $[\pi, +\infty)$, ma non è convessa in nessun intervallo che contenga π come punto interno.

6. Caratterizzare tutti gli intervalli $[a, b]$ su cui

$$f(x) = (x-2)(x-3)(x-4)$$

è convessa.

In questo caso la funzione è derivabile due volte, quindi la domanda si traduce in determinare gli intervalli in cui $f'' \geq 0$. Calcoliamo le derivate usando la regola

$$D(ghl) = ghl' + gh'l + g'hl$$

(ottenuta applicando due volte la regola di derivazione di un prodotto):

$$f'(x) = (x-2)(x-3) + (x-2)(x-4) + (x-3)(x-4)$$

$$f''(x) = (x-2)+(x-3)+(x-2)+(x-4)+(x-3)+(x-4) = 6(x-3)$$

dunque $f'' \geq 0$ su $[3, +\infty)$ e gli intervalli $[a, b]$ su cui f è convessa sono tutti quelli contenuti in $[3, +\infty)$.

NOTA: alternativamente, si poteva porre $y = x - 3$, per cui in queste variabili la funzione da studiare è $y^3 - y$, la cui derivata seconda è $6y$, da cui si ottiene che la funzione è convessa per $y \geq 0$, ovvero $x - 3 \geq 0$, ovvero $x \geq 3$, come sopra.

6. Caratterizzare tutti gli intervalli $[a, b]$ su cui

$$f(x) = e^x(x^2 - 5x + 8)$$

è concava.

In questo caso la funzione è derivabile due volte, quindi la domanda si traduce in determinare gli intervalli in cui $f'' \leq 0$. Calcoliamo

$$f'(x) = e^x(x^2 - 3x + 3), \qquad f''(x) = e^x(x^2 - x).$$

Dunque

$$f''(x) \leq 0 \iff 0 \leq x \leq 1,$$

ovvero f è convessa in $(-\infty, 0]$ e $[1, +\infty)$, concava in $[0, 1]$. Dunque f è concava su $[a, b]$ se e solo se $[a, b] \subseteq [0, 1]$.

La formula di Taylor con resto di Peano

OSSERVAZIONE: se f è continua nel punto a possiamo scrivere (ricordando la definizione di "o piccolo") che

$$f(x) = f(a) + o(1) \qquad \text{per } x \to a;$$

se f è derivabile in a, per la definizione di differenziabilità si ha

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a) \qquad \text{per } x \to a.$$

Vogliamo generalizzare questa formula a funzioni n volte derivabili: il problema è trovare un polinomio P di grado n tale che si possa scrivere

$$f(x) = P(x) + o(x-a)^n \qquad \text{per } x \to a,$$

e se possibile esprimere P mediante le derivate di f in a fino all'ordine n.

Teorema. *Siano $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$ e f una funzione definita in un intorno del punto $a \in \mathbf{R}$ e derivabile n volte in a. Allora esiste un unico polinomio P di grado $\leq n$ tale che*

$$f(x) = P(x) + o(x-a)^n \qquad \text{per } x \to a.$$

P è caratterizzato da $P^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ per $k = 0, \dots, n$, ed è quindi dato dalla formula

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Questo polinomio viene detto polinomio di Taylor di f di ordine n *e di centro a.*

NOTA: si ha quindi la formula

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o(x-a)^n \quad \text{per } x \to a,$$

detta *formula di Taylor con il resto di Peano.* Questa formula è di ESTREMA UTILITÀ nel calcolo dei limiti.

Dim. Possiamo supporre, mediante una traslazione, che $a = 0$. Consideriamo il polinomio

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k,$$

e calcoliamo il limite $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x) - P(x)}{x^n}$.

Questa è una forma indeterminata 0/0 Possiamo applicare l'Hopital, ottenendo l'equivalenza con il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - P'(x)}{nx^{n-1}}.$$

Se $n = 1$ questo limite è uguale a 0 e quindi $f - P = o(x^1)$ per $x \to 0$. Altrimenti si ha di nuovo una forma indeterminata 0/0, e si può ri-applicare l'Hopital, ottenendo l'equivalenza con il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{f^{(2)}(x) - P^{(2)}(x)}{n(n-1)x^{n-2}} \ldots$$

In generale, si applica l'Hopital n volte, ottenendo alla fine l'equivalenza con il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{f^{(n)}(x) - P^{(n)}(x)}{n!} = 0.$$

Dunque $f - P = o(x)^n$.

Dalla applicazione dell'Hopital vista sopra si ha che se $Q = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ è un polinomio di grado $\leq n$ e si ha $c_k \neq f^{(k)}(0)/k!$

per qualche $k \in \{0, \dots, n\}$, allora, posto $m = \min\{k : \ c_k \neq f^{(k)}(0)/k!$, si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - Q(x)}{x^n} = (H) = \ldots = (H) =$$
$$= \frac{f^{(m)}(0) - c_m\, m!}{n(n-1)\ldots(n-m+1)x^{n-m}} \neq 0,$$

e quindi $f - Q \neq o(x)^n$. Dunque il polinomio P è univocamente determinato. $\square$

L'operazione che associa ad una funzione f n-volte derivabile in un punto a il suo polinomio di Taylor di ordine n viene indicata con il simbolo T_a^n. Per lo più avremo a che fare con $a = 0$, nel qual caso ci "dimenticheremo" dell'indice 0.
Per esempio:

$$T_0^3(\exp) = e^0 + \frac{e^0}{1!}x + \frac{e^0}{2!}x^2 + \frac{e^0}{3!}x^3 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6};$$
$$T_0^4(\sin) = \sin 0 + \frac{\cos 0}{1!}x + \frac{-\sin 0}{2!}x^2 + \frac{-\cos 0}{3!}x^3 + \frac{\sin 0}{4!}x^4 = x - \frac{x^3}{6}.$$

OSSERVAZIONE IMPORTANTE (per il calcolo):

1) $T_a^n(f+g) = T_a^n f + T_a^n g$;

2) $T_a^n(fg) = T_a^n(T_a^n f \cdot T_a^n g)$;

3) $T_a^n(g \circ f) = T_a^n(T_{f(a)}^n g \circ T_a^n f)$.

(notare che se P è polinomio in $(x - a)$, allora l'operazione T_a^n corrisponde a "troncare" P al grado n). Infatti si verifica subito che le derivate k-ime dei secondi membri delle equaglianze sono quelle richieste, per $k = 1, \dots, n$.

Polinomi di Taylor elementari

(da imparare A MEMORIA, e da verificare calcolando le derivate in 0)

$$T^n(\exp)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!};$$

$$T^{2n}(\cos)(x) = T^{2n+1}(\cos)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!};$$

$$T^{2n+1}(\sin)(x) = T^{2n+2}(\sin)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!};$$

$$T^n(\log(1+x)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k};$$

$$T^{2n+1}(\arctan)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)};$$

$$T^n((1-x)^{-1}) = \sum_{k=0}^{n} z^k;$$

$$T^1((1+x)^\alpha) = 1 + \alpha x;$$

$$T^3 \tan x = T^4 \tan x = x + \frac{1}{3}x^3.$$

ESEMPI: 1) Calcoliamo il polinomio di Taylor di ordine 2 e centro 0 della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \log\left(\dfrac{\sin 3x}{3x}\right) & \text{se } x \in \left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right[\\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Ricordando che si ha

$$\sin 3x = 3x - \frac{9}{2}x^3 + o(x^3)$$

e che $\log(1+y) = y + o(y),$ si ha

$$\log\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right) = \log(1 - \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)) = -\frac{3}{2}x^2 + o(x^2),$$

ovvero

$$T^2 f(x) = -\frac{3}{2}x^2.$$

1bis) Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0+} \left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^{\dfrac{1}{x\sin 2x}}.$$

Possiamo scrivere in forma esponenziale

$$\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^{\dfrac{1}{x\sin 2x}} = \exp\Big(\frac{1}{x\sin 2x}\log\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)\Big).$$

Il limite dell'esponente (ricordando il limite fondamentale di $\sin y/y$ e l'esempio 1)) vale

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{2x^2}\log\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right) = \lim_{x\to 0+} \Big(-\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)\Big)\frac{1}{2x^2} = -\frac{3}{4}.$$

Dunque il nostro limite vale $e^{-3/4}$.

3) Calcoliamo il polinomio di Taylor di ordine 6 in 0 della funzione

$$f(x) = \log(1+x^2) - x^2 \cos x.$$

Ricordiamo che

$$\log(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + o(z^3)$$

e che

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$

per cui

$$\log(1+x^2) = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^6 + o(x^6)$$

e anche

$$x^2 \cos x = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{24}x^6 + o(x^6).$$

Quindi si ha

$$f(x) = \Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{24}\Big)x^6 + o(x^6) = \frac{7}{24}x^6 + o(x^6),$$

e dunque

$$T^6 f(x) = \Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{24}\Big)x^6 = \frac{7}{24}x^6.$$

2bis) Calcoliamo il limite

$$L = \lim_{x\to 0+} \frac{x^2 \cos x - \log(1+x^2)}{7x^2 \tan(x^4)}.$$

Ricordando che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x^4}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1,$$

il limite è uguale a

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^2\cos x - \log(1+x^2)}{7x^6}.$$

Per l'esempio 2) si ha quindi

$$L = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{7x^6}\left(-\frac{7}{24}x^6 + o(x^6)\right) = -\frac{1}{24}.$$

PER ESERCIZIO: risolvere i limiti negli esempi con la regola dell'Hopital.

4) Calcolare il limite

$$L = \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt[2]{x} - \sqrt[3]{\sin(x^{\frac{3}{2}})}}{(x-\sin x)\sqrt[2]{x}}.$$

Per prima cosa semplifichiamo il limite ricordandoci che $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$, per cui

$$L = 6\lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt[2]{x} - \sqrt[3]{\sin(x^{\frac{3}{2}})}}{x^3\sqrt[2]{x}}.$$

Per avere solo potenze intere cambiamo variabile ponendo $y = \sqrt{x}$. Il limite diventa

$$\lim_{y\to 0+} \frac{y - \sqrt[3]{\sin(y^3)}}{y^6 y} = 6\lim_{y\to 0+} \frac{1 - \sqrt[3]{\frac{\sin(y^3)}{y^3}}}{y^6}$$

$$= 6\lim_{t\to 0+} \frac{1 - \sqrt[3]{\frac{\sin t}{t}}}{t^2}$$

(abbiamo usato il cambiamento di variabili $t = y^3$). Si ha

$$\frac{\sin t}{t} = \frac{t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^3)}{t} = 1 - \frac{1}{6}t^2 + o(t^2)$$

e $\sqrt[3]{1+z} = (1+z)^{1/3} = 1 + \dfrac{1}{3}z + o(z)$, per cui

$$\sqrt[3]{\frac{\sin t}{t}} = \sqrt[3]{1 - \frac{1}{6}t^2 + o(t^2)} = 1 - \frac{1}{18}t^2 + o(t^2).$$

Dunque

$$\begin{aligned} L &= 6 \lim_{t\to 0+} \frac{1 - \sqrt[3]{\frac{\sin t}{t}}}{t^2} \\ &= 6 \lim_{t\to 0+} \frac{\frac{1}{18}t^2 + o(t^2)}{t^2} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

ESEMPIO (**Criterio della derivata n-ima**). Sia f n volte derivabile in a, e supponiamo che

$$f'(a) = f^{(2)}(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0.$$

Il Teorema sui polinomi di Taylor ci assicura che f si comporta allora come $f^{(n)}(a)(x-a)^n$ nel senso che

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o(x-a)^n.$$

Dunque se n è pari e $f^{(n)}(a) < 0$ si ha un punto di massimo relativo per f in a; se n è pari e $f^{(n)}(a) > 0$ si ha un punto di minimo relativo per f in a.

Se n è dispari e $f^{(n)}(a) < 0$ f è strettamente decrescente in un intorno di a; se n è dispari e $f^{(n)}(a) > 0$ f è strettamente crescente in un intorno di a.

Il resto di Lagrange nella formula di Taylor

Sia f $n+1$ volte derivabile in un intervallo I e $a \in I$. Allora usando il Teorema di Cauchy si dimostra che se $x \in I$, esiste $\xi \in]a, x[$ tale che si ha

$$f(x) = T_a^n f(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

ovvero il resto della formula di Taylor si può esprimere nella forma (detta di Lagrange)

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Possiamo finalmente calcolare la somma di alcune serie notevoli che abbiamo già enunciato in precedenza.

ESEMPI: 1) Consideriamo $f(x) = e^x$. Allora la formula di Taylor con il resto di Lagrange diventa (per $a = 0$)

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + e^{\xi} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

da cui

$$|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}| \le e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Dato che $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, abbiamo

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

2) Consideriamo $f(x) = \log(1+x)$. Allora la formula di Taylor con il resto di Lagrange diventa (per $a = 0$)

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \frac{(-1)^n}{(1+\xi)^{n+1}} \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Quindi, se $0 \leq x < 1$

$$|\log(1+x) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}| \leq \frac{|x|^{n+1}}{n+1},$$

e, dato che $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{|x|^n}{n} = 0$, si ha infine

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}.$$

Cognome e nome: $\sqcup\!\sqcup$

Analisi Matematica I (Ingegneria Informatica) Corso: $\boxed{\text{Braides}}$ $\boxed{\text{Tauraso}}$

Prima Prova Intermedia (25/10/2001) - Risposta esatta: 3 punti, errata: -0.5 punti, vuota: 0 punti.

---

1. Il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{\log x} - 1}$ è

● : $(1, e]$ $\boxed{\text{B}}$: $(0, e)$ $\boxed{\text{C}}$: $(0, e) \setminus \{1\}$ $\boxed{\text{D}}$: $(0, e]$ $\boxed{\text{E}}$: $(0, e] \setminus \{1\}$

---

2. Il dominio della funzione $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{|x|}{3 - x}\right)$ è

$\boxed{\text{A}}$: $\mathbf{R} \setminus \{3\}$ $\boxed{\text{B}}$: $(-\infty, 3)$ $\boxed{\text{C}}$: $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$ ● : $(-\infty, \frac{3}{2}]$ $\boxed{\text{E}}$: $[-1, 1]$

---

3. Il minimo dell'insieme $\left\{\sin\left(\dfrac{\pi}{1 + 3|x|}\right) : x \in \mathbf{R}\right\}$

$\boxed{\text{A}}$: è -1 $\boxed{\text{B}}$: non esiste ● : è 0 $\boxed{\text{D}}$: è 1 $\boxed{\text{E}}$: è $\frac{1}{3}$

---

4. L'estremo superiore dell'insieme $\left\{\log\left(2 + e^{-4|x|}\right) : x \in \mathbf{R}\right\}$ è

$\boxed{\text{A}}$: 0 $\boxed{\text{B}}$: 1 ● : $\log 3$ $\boxed{\text{D}}$: e $\boxed{\text{E}}$: $\log 4$

---

5. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(x+2)^3 - x^3}{3x^2 + \sin(x^2)} =$ $\boxed{\text{A}}$: non esiste $\boxed{\text{B}}$: $+\infty$ $\boxed{\text{C}}$: 0 $\boxed{\text{D}}$: $\frac{2}{3}$ ● : 2

---

6. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x - \sqrt{x^2 + 2x + 4\log(1 + x^3)} =$ $\boxed{\text{A}}$: $+\infty$ $\boxed{\text{B}}$: 1 $\boxed{\text{C}}$: -2 ● : -1 $\boxed{\text{E}}$: 0

---

7. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3x - x\log x + e^{2x}}{2x + x\log x + e^{-3x}} =$ $\boxed{\text{A}}$: -1 ● : $+\infty$ $\boxed{\text{C}}$: 0 $\boxed{\text{D}}$: $-\frac{2}{3}$ $\boxed{\text{E}}$: $\frac{3}{2}$

---

8. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 2x - 3} =$ $\boxed{\text{A}}$: 1 $\boxed{\text{B}}$: $\frac{4}{3}$ $\boxed{\text{C}}$: $-\frac{3}{2}$ ● : $\frac{5}{4}$ $\boxed{\text{E}}$: 0

---

9. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(e^{2x} + 4x^2)}{\sin(3x^2 - 4x)} =$ $\boxed{\text{A}}$: 0 $\boxed{\text{B}}$: $\frac{4}{3}$ ● : $-\frac{1}{2}$ $\boxed{\text{D}}$: -1 $\boxed{\text{E}}$: $\frac{2}{3}$

---

10. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi\cos x)}{x^2} =$ ● : $\frac{\pi}{2}$ $\boxed{\text{B}}$: $\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\boxed{\text{C}}$: 1 $\boxed{\text{D}}$: $+\infty$ $\boxed{\text{E}}$: $\frac{\pi}{3}$

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E	E	E

Cognome e nome: |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|

Analisi Matematica I (Ingegneria Informatica) Corso: Braides Tauraso
Prima Prova Intermedia (25/10/2001) - Risposta esatta: 3 punti, errata: -0.5 punti, vuota: 0 punti.

---

1. Il dominio della funzione $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{|x|}{4-x}\right)$ è

A : $[-2,2]$ B : $[-1,1]$ ● : $(-\infty,2]$ D : $\mathbf{R}\setminus\{4\}$ E : $(-\infty,4)$

---

2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+3)^3-x^3}{4x^2+\sin(x^2)} =$ A : $\frac{3}{4}$ B : non esiste C : 0 ● : $\frac{9}{4}$ E : $+\infty$

---

3. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2+4x-5}{x^2+4x-5} =$ A : 0 B : 1 C : -1 D : 1 ● : 1

---

4. Il minimo dell'insieme $\left\{\sin\left(\dfrac{\pi}{1+5|x|}\right) : x\in\mathbf{R}\right\}$

● : è 0 B : è -1 C : non esiste D : è $\frac{1}{5}$ E : è 1

---

5. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x-\sqrt{x^2+3x+6\log(1+x^3)} =$ A : $\frac{3}{2}$ B : 0 ● : $-\frac{3}{2}$ D : $+\infty$ E : -3

---

6. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(e^{3x}+7x^2)}{\sin(4x^2-7x)} =$ A : $\frac{3}{4}$ ● : $-\frac{3}{7}$ C : -1 D : $\frac{7}{4}$ E : 0

---

7. Il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{\log x}-1}$ è

● : $(1,e]$ B : $(0,e)$ C : $(0,e)\setminus\{1\}$ D : $(0,e]$ E : $(0,e]\setminus\{1\}$

---

8. L'estremo superiore dell'insieme $\left\{\log\left(3+e^{-5|x|}\right) : x\in\mathbf{R}\right\}$ è

A : 0 B : 1 ● : $\log 4$ D : e E : $\log 5$

---

9. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{5x-x\log x+e^{3x}}{3x+x\log x+e^{-5x}} =$ A : -1 ● : $+\infty$ C : 0 D : $-\frac{3}{5}$ E : $\frac{5}{3}$

---

10. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi\cos x)}{x^2} =$ ● : $\frac{\pi}{2}$ B : $\frac{1}{\sqrt{2}}$ C : 1 D : $+\infty$ E : $\frac{\pi}{3}$

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E	E	E

Cognome e nome:

Analisi Matematica I (Ingegneria Informatica) Corso: $\boxed{\text{Braides}}$ $\boxed{\text{Tauraso}}$

Prima Prova Intermedia (25/10/2001) - Risposta esatta: 3 punti, errata: -0.5 punti, vuota: 0 punti.

---

1. Il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{\log x} - 1}$ è

$\boxed{A}$: $(0, e) \setminus \{1\}$ $\boxed{B}$: $(0, e]$ $\boxed{C}$: $(0, e] \setminus \{1\}$ $\boxed{\bullet}$: $(1, e]$ $\boxed{E}$: $(0, e)$

---

2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(x+4)^3 - x^3}{5x^2 + \sin(x^2)} =$ $\boxed{A}$: non esiste $\boxed{B}$: 0 $\boxed{\bullet}$: $\frac{12}{5}$ $\boxed{D}$: $+\infty$ $\boxed{E}$: $\frac{4}{5}$

---

3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(e^{4x} + 10x^2)}{\sin(5x^2 - 10x)} =$ $\boxed{A}$: $\frac{4}{5}$ $\boxed{\bullet}$: $-\frac{2}{5}$ $\boxed{C}$: -1 $\boxed{D}$: 2 $\boxed{E}$: 0

---

4. Il dominio della funzione $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{|x|}{5-x}\right)$ è

$\boxed{A}$: $[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}]$ $\boxed{B}$: $[-1, 1]$ $\boxed{\bullet}$: $(-\infty, \frac{5}{2}]$ $\boxed{D}$: $\mathbf{R} \setminus \{5\}$ $\boxed{E}$: $(-\infty, 5)$

---

5. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x - \sqrt{x^2 + 4x + 8\log(1+x^3)} =$ $\boxed{A}$: 0 $\boxed{\bullet}$: -2 $\boxed{C}$: 2 $\boxed{D}$: $+\infty$ $\boxed{E}$: -4

---

6. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi\cos x)}{x^2} =$ $\boxed{A}$: $+\infty$ $\boxed{B}$: 1 $\boxed{C}$: $\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\boxed{D}$: $\frac{\pi}{3}$ $\boxed{\bullet}$: $\frac{\pi}{2}$

---

7. Il minimo dell'insieme $\left\{\sin\left(\dfrac{\pi}{1+7|x|}\right) : x \in \mathbf{R}\right\}$

$\boxed{A}$: è -1 $\boxed{B}$: non esiste $\boxed{C}$: è $\frac{1}{7}$ $\boxed{D}$: è 1 $\boxed{\bullet}$: è 0

---

8. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{7x - x\log x + e^{4x}}{4x + x\log x + e^{-7x}} =$ $\boxed{\bullet}$: $+\infty$ $\boxed{B}$: 0 $\boxed{C}$: -1 $\boxed{D}$: $\frac{7}{4}$ $\boxed{E}$: $-\frac{4}{7}$

---

9. L'estremo superiore dell'insieme $\left\{\log\left(4 + e^{-6|x|}\right) : x \in \mathbf{R}\right\}$ è

$\boxed{\bullet}$: $\log 5$ $\boxed{B}$: $\log 6$ $\boxed{C}$: e $\boxed{D}$: 0 $\boxed{E}$: 1

---

10. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2 + 5x - 6}{x^2 + 6x - 7} =$ $\boxed{A}$: 0 $\boxed{B}$: 1 $\boxed{C}$: $\frac{6}{7}$ $\boxed{D}$: $-\frac{5}{6}$ $\boxed{\bullet}$: $\frac{7}{8}$

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E	E	E

Cognome e nome: |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|

Analisi Matematica I (Ingegneria Informatica) Corso: Braides Tauraso

Prima Prova Intermedia (25/10/2001) - Risposta esatta: 3 punti, errata: −0.5 punti, vuota: 0 punti.

---

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{9x - x\log x + e^{5x}}{5x + x\log x + e^{-9x}} =$ A : 0 B : -1 ● : $+\infty$ D : $-\frac{5}{9}$ E : $\frac{9}{5}$

---

2. Il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{\log x} - 1}$ è

A : $(0, e] \setminus \{1\}$ ● : $(1, e]$ C : $(0, e)$ D : $(0, e) \setminus \{1\}$ E : $(0, e]$

---

3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x - \sqrt{x^2 + 5x + 10\log(1 + x^3)} =$ ● : $-\frac{5}{2}$ B : -5 C : $\frac{5}{2}$ D : $+\infty$ E : 0

---

4. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(x+5)^3 - x^3}{6x^2 + \sin(x^2)} =$ A : $\frac{5}{6}$ B : non esiste C : 0 ● : $\frac{5}{2}$ E : $+\infty$

---

5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi\cos x)}{x^2} =$ ● : $\frac{\pi}{2}$ B : $\frac{1}{\sqrt{2}}$ C : 1 D : $+\infty$ E : $\frac{\pi}{3}$

---

6. L'estremo superiore dell'insieme $\left\{\log\left(5 + e^{-7|x|}\right) : x \in \mathbf{R}\right\}$ è

● : $\log 6$ B : $\log 7$ C : e D : 0 E : 1

---

7. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(e^{5x} + 13x^2)}{\sin(6x^2 - 13x)} =$ A : 0 B : $\frac{13}{6}$ ● : $-\frac{5}{13}$ D : -1 E : $\frac{5}{6}$

---

8. Il minimo dell'insieme $\left\{\sin\left(\dfrac{\pi}{1 + 9|x|}\right) : x \in \mathbf{R}\right\}$

A : è -1 B : non esiste C : è $\frac{1}{9}$ D : è 1 ● : è 0

---

9. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2 + 6x - 7}{x^2 + 8x - 9} =$ A : 1 B : $\frac{7}{9}$ C : $-\frac{3}{4}$ ● : $\frac{4}{5}$ E : 0

---

10. Il dominio della funzione $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{|x|}{6 - x}\right)$ è

A : $[-3, 3]$ B : $[-1, 1]$ ● : $(-\infty, 3]$ D : $\mathbf{R} \setminus \{6\}$ E : $(-\infty, 6)$

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E	E	E

Cognome e nome: $\sqcup$

Analisi Matematica I (Ingegneria Informatica) Corso: $\boxed{\text{Braides}}$ $\boxed{\text{Tauraso}}$

Prima Prova Intermedia (25/10/2001) - Risposta esatta: 3 punti, errata: -0.5 punti, vuota: 0 punti.

---

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(x+6)^3 - x^3}{7x^2 + \sin(x^2)} =$ $\boxed{\text{A}}$: non esiste $\boxed{\text{B}}$: 0 ● : $\frac{18}{7}$ $\boxed{\text{D}}$: $+\infty$ $\boxed{\text{E}}$: $\frac{6}{7}$

---

2. Il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{\log x} - 1}$ è

$\boxed{\text{A}}$: $(0, e] \setminus \{1\}$ ● : $(1, e]$ $\boxed{\text{C}}$: $(0, e)$ $\boxed{\text{D}}$: $(0, e) \setminus \{1\}$ $\boxed{\text{E}}$: $(0, e]$

---

3. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2 + 7x - 8}{x^2 + 10x - 11} =$ $\boxed{\text{A}}$: 1 $\boxed{\text{B}}$: $\frac{8}{11}$ $\boxed{\text{C}}$: $-\frac{7}{10}$ ● : $\frac{3}{4}$ $\boxed{\text{E}}$: 0

---

4. L'estremo superiore dell'insieme $\left\{\log\left(6 + e^{-8|x|}\right) : x \in \mathbf{R}\right\}$ è

$\boxed{\text{A}}$: 0 $\boxed{\text{B}}$: 1 ● : $\log 7$ $\boxed{\text{D}}$: e $\boxed{\text{E}}$: $\log 8$

---

5. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{11x - x\log x + e^{6x}}{6x + x\log x + e^{-11x}} =$ $\boxed{\text{A}}$: -1 $\boxed{\text{B}}$: 0 $\boxed{\text{C}}$: $\frac{11}{6}$ ● : $+\infty$ $\boxed{\text{E}}$: $-\frac{6}{11}$

---

6. Il minimo dell'insieme $\left\{\sin\left(\dfrac{\pi}{1 + 11|x|}\right) : x \in \mathbf{R}\right\}$

● : è 0 $\boxed{\text{B}}$: è -1 $\boxed{\text{C}}$: non esiste $\boxed{\text{D}}$: è $\frac{1}{11}$ $\boxed{\text{E}}$: è 1

---

7. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi\cos x)}{x^2} =$ ● : $\frac{\pi}{2}$ $\boxed{\text{B}}$: 1 $\boxed{\text{C}}$: $\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\boxed{\text{D}}$: $\frac{\pi}{3}$ $\boxed{\text{E}}$: $+\infty$

---

8. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x - \sqrt{x^2 + 6x + 12\log(1 + x^3)} =$ ● : -3 $\boxed{\text{B}}$: -6 $\boxed{\text{C}}$: 3 $\boxed{\text{D}}$: $+\infty$ $\boxed{\text{E}}$: 0

---

9. Il dominio della funzione $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{|x|}{7 - x}\right)$ è

$\boxed{\text{A}}$: $[-\frac{7}{2}, \frac{7}{2}]$ $\boxed{\text{B}}$: $[-1, 1]$ ● : $(-\infty, \frac{7}{2}]$ $\boxed{\text{D}}$: $\mathbf{R} \setminus \{7\}$ $\boxed{\text{E}}$: $(-\infty, 7)$

---

10. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(e^{6x} + 16x^2)}{\sin(7x^2 - 16x)} =$ $\boxed{\text{A}}$: -1 ● : $-\frac{3}{8}$ $\boxed{\text{C}}$: 0 $\boxed{\text{D}}$: $\frac{16}{7}$ $\boxed{\text{E}}$: $\frac{6}{7}$

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E	E	E

Cognome e nome:

Analisi Matematica I (Ingegneria Informatica) Corso: $\boxed{\text{Braides}}$ $\boxed{\text{Tauraso}}$

Prima Prova Intermedia (25/10/2001) - Risposta esatta: 3 punti, errata: -0.5 punti, vuota: 0 punti.

---

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x-\sqrt{x^2+7x+14\log(1+x^3)} =$ $\boxed{A}: 0$ $\boxed{\bullet}: -\frac{7}{2}$ $\boxed{C}: \frac{7}{2}$ $\boxed{D}: +\infty$ $\boxed{E}: -7$

---

2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(x+7)^3-x^3}{8x^2+\sin(x^2)} =$ $\boxed{A}$: non esiste $\boxed{B}: +\infty$ $\boxed{C}: 0$ $\boxed{D}: \frac{7}{8}$ $\boxed{\bullet}: \frac{21}{8}$

---

3. L'estremo superiore dell'insieme $\left\{\log\left(7+e^{-9|x|}\right) : x\in\mathbf{R}\right\}$ è

$\boxed{A}: 0$ $\boxed{\bullet}: \log 8$ $\boxed{C}: \log 9$ $\boxed{D}: 1$ $\boxed{E}: e$

---

4. Il minimo dell'insieme $\left\{\sin\left(\frac{\pi}{1+13|x|}\right) : x\in\mathbf{R}\right\}$

$\boxed{A}$: è -1 $\boxed{B}$: non esiste $\boxed{C}$: è $\frac{1}{13}$ $\boxed{D}$: è 1 $\boxed{\bullet}$: è 0

---

5. Il dominio della funzione $f(x)=\arcsin\left(\frac{|x|}{8-x}\right)$ è

$\boxed{\bullet}: (-\infty,4]$ $\boxed{B}: [-1,1]$ $\boxed{C}: \mathbf{R}\setminus\{8\}$ $\boxed{D}: (-\infty,8)$ $\boxed{E}: [-4,4]$

---

6. Il dominio della funzione $f(x)=\sqrt{\frac{1}{\log x}-1}$ è

$\boxed{A}: (0,e]\setminus\{1\}$ $\boxed{\bullet}: (1,e]$ $\boxed{C}: (0,e)$ $\boxed{D}: (0,e)\setminus\{1\}$ $\boxed{E}: (0,e]$

---

7. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sin(\pi\cos x)}{x^2} =$ $\boxed{\bullet}: \frac{\pi}{2}$ $\boxed{B}: 1$ $\boxed{C}: \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\boxed{D}: \frac{\pi}{3}$ $\boxed{E}: +\infty$

---

8. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\log(e^{7x}+19x^2)}{\sin(8x^2-19x)} =$ $\boxed{A}: -1$ $\boxed{\bullet}: -\frac{7}{19}$ $\boxed{C}: 0$ $\boxed{D}: \frac{19}{8}$ $\boxed{E}: \frac{7}{8}$

---

9. $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{x^2+8x-9}{x^2+12x-13} =$ $\boxed{A}: 0$ $\boxed{B}: 1$ $\boxed{C}: \frac{9}{13}$ $\boxed{D}: -\frac{2}{3}$ $\boxed{\bullet}: \frac{5}{7}$

---

10. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{13x-x\log x+e^{7x}}{7x+x\log x+e^{-13x}} =$ $\boxed{A}: -1$ $\boxed{\bullet}: +\infty$ $\boxed{C}: 0$ $\boxed{D}: -\frac{7}{13}$ $\boxed{E}: \frac{13}{7}$

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E	E	E

Cognome e nome: $\underline{\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad}$

Analisi Matematica I (Ingegneria Informatica) Corso: $\boxed{\text{Braides}}$ $\boxed{\text{Tauraso}}$
Seconda Prova Intermedia (15/11/2001)
Risposta esatta: 3 punti, errata: -0.5 punti, vuota: 0 punti.

---

1. La derivata di $\log(fg)$ è
$\boxed{\text{A}}$: $1/f + 1/g$ ● : $f'/f + g'/g$ $\boxed{\text{C}}$: $1/(fg)$ $\boxed{\text{D}}$: $f' \log g + g' \log f$ $\boxed{\text{E}}$: $\log(f'g + fg')$

---

2. La retta tangente in $x = 1$ al grafico della funzione $f(x) = (3x + 2)x^x$ è
$\boxed{\text{A}}$: $y = 8x$ $\boxed{\text{B}}$: $y = x$ $\boxed{\text{C}}$: $y = 5x + 3$ ● : $y = 8x - 3$ $\boxed{\text{E}}$: $y = -5x + 3$

---

3. La funzione $\sin(|x| - \dfrac{1}{2})$ ha esattamente
$\boxed{\text{A}}$: due punti angolosi in $x = \pm\frac{1}{2}$ ● : un punto angoloso in $x = 0$ $\boxed{\text{C}}$: infinite cuspidi
$\boxed{\text{D}}$: una cuspide in $x = 0$ $\boxed{\text{E}}$: infiniti punti angolosi

---

4. La funzione $f(x) = e^x(x - 2)^2$ è decrescente nell'intervallo
$\boxed{\text{A}}$: $[0, 3]$ $\boxed{\text{B}}$: $\mathbf{R}$ ● : $[0, 2]$ $\boxed{\text{D}}$: $[-1, 0]$ $\boxed{\text{E}}$: $[-1, 2]$

---

5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(2x + 1)^{3x} - 1}{(5x + 1)^{2x} - 1} =$ $\boxed{\text{A}}$: $\frac{3}{2}$ $\boxed{\text{B}}$: 1 $\boxed{\text{C}}$: $\frac{2}{3}$ ● : $\frac{3}{5}$ $\boxed{\text{E}}$: $\frac{2}{5}$

---

6. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{\log 2}{2^x - 1}\right) =$ $\boxed{\text{A}}$: $+\infty$ $\boxed{\text{B}}$: $\log 2$ $\boxed{\text{C}}$: $\frac{1}{2}$ ● : $\frac{1}{2}\log 2$ $\boxed{\text{E}}$: 0

---

7. L'asintoto obliquo della funzione $f(x) = \dfrac{2x^2}{x + 1} + 3\,\dfrac{\sin x}{|x|}$ per $x \to +\infty$ è
$\boxed{\text{A}}$: $y = 2x + 3$ ● : $y = 2x - 2$ $\boxed{\text{C}}$: $y = 2x$ $\boxed{\text{D}}$: $y = 3x + 2$ $\boxed{\text{E}}$: $y = 2x + 2$

---

8. La funzione $f(x) = \dfrac{3x^2}{2\log|x|} + 2$ ha un punto di minimo in
$x =$ $\boxed{\text{A}}$: 2 $\boxed{\text{B}}$: $3e$ $\boxed{\text{C}}$: e^2 ● : $\sqrt{e}$ $\boxed{\text{E}}$: $\log 2$

---

9. Il numero di massimi locali della funzione $f(x) = \begin{cases} |x|/2 & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z} \\ 1 & x \in \mathbf{Z} \end{cases}$ è
$\boxed{\text{A}}$: 2 $\boxed{\text{B}}$: 4 ● : 3 $\boxed{\text{D}}$: ∞ $\boxed{\text{E}}$: 0

---

10. $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2} \frac{\tan(3x)}{\tan(5x)} =$ $\boxed{\text{A}}$: 0 $\boxed{\text{B}}$: 1 ● : $\frac{5}{3}$ $\boxed{\text{D}}$: $-\infty$ $\boxed{\text{E}}$: $\frac{3}{5}$

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E	E	E

Cognome e nome: $\underline{\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad}$

Analisi Matematica I (Ingegneria Informatica) Corso: $\boxed{\text{Braides}}$ $\boxed{\text{Tauraso}}$
Seconda Prova Intermedia (15/11/2001)
Risposta esatta: 3 punti, errata: -0.5 punti, vuota: 0 punti.

---

1. La funzione $f(x) = \dfrac{5x^2}{2\log|x|} + 4$ ha un punto di minimo in

$x =$ $\boxed{A}$: $\log 4$ $\boxed{B}$: $5e$ $\boxed{C}$: e^2 $\boxed{D}$: 4 $\boxed{\bullet}$: $\sqrt{e}$

---

2. La funzione $\sin(|x| - \frac{1}{2})$ ha esattamente

$\boxed{A}$: infinite cuspidi $\boxed{B}$: due punti angolosi in $x = \pm\frac{1}{2}$ $\boxed{\bullet}$: un punto angoloso in $x = 0$
$\boxed{D}$: infiniti punti angolosi $\boxed{E}$: una cuspide in $x = 0$

---

3. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{\log 3}{3^x - 1}\right) =$ $\boxed{A}$: $\log 3$ $\boxed{B}$: 0 $\boxed{\bullet}$: $\frac{1}{2}\log 3$ $\boxed{D}$: $+\infty$ $\boxed{E}$: $\frac{1}{2}$

---

4. Il numero di massimi locali della funzione $f(x) = \begin{cases} |x|/3 & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z} \\ 1 & x \in \mathbf{Z} \end{cases}$ è

$\boxed{A}$: 0 $\boxed{\bullet}$: 5 $\boxed{C}$: ∞ $\boxed{D}$: 6 $\boxed{E}$: 3

---

5. La derivata di $\log(fg)$ è

$\boxed{A}$: $1/f + 1/g$ $\boxed{\bullet}$: $f'/f + g'/g$ $\boxed{C}$: $1/(fg)$ $\boxed{D}$: $f'\log g + g'\log f$ $\boxed{E}$: $\log(f'g + fg')$

---

6. La funzione $f(x) = e^x(x-3)^2$ è decrescente nell'intervallo

$\boxed{A}$: $[1,4]$ $\boxed{B}$: $\mathbf{R}$ $\boxed{\bullet}$: $[1,3]$ $\boxed{D}$: $[0,1]$ $\boxed{E}$: $[0,3]$

---

7. L'asintoto obliquo della funzione $f(x) = \dfrac{3x^2}{x+2} + 4\dfrac{\sin x}{|x|}$ per $x \to +\infty$ è

$\boxed{A}$: $y = 3x + 4$ $\boxed{\bullet}$: $y = 3x - 6$ $\boxed{C}$: $y = 3x$ $\boxed{D}$: $y = 4x + 6$ $\boxed{E}$: $y = 3x + 6$

---

8. $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2}\frac{\tan(5x)}{\tan(7x)} =$ $\boxed{A}$: 0 $\boxed{B}$: 1 $\boxed{\bullet}$: $\frac{7}{5}$ $\boxed{D}$: $-\infty$ $\boxed{E}$: $\frac{5}{7}$

---

9. La retta tangente in $x = 1$ al grafico della funzione $f(x) = (4x+3)x^x$ è

$\boxed{A}$: $y = x$ $\boxed{B}$: $y = 11x$ $\boxed{\bullet}$: $y = 11x - 4$ $\boxed{D}$: $y = 7x + 4$ $\boxed{E}$: $y = -7x + 4$

---

10. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(3x+1)^{4x} - 1}{(6x+1)^{3x} - 1} =$ $\boxed{A}$: $\frac{4}{3}$ $\boxed{B}$: $\frac{7}{10}$ $\boxed{C}$: $\frac{1}{2}$ $\boxed{D}$: 1 $\boxed{\bullet}$: $\frac{2}{3}$

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E	E	E

Cognome e nome:

Analisi Matematica I (Ingegneria Informatica) Corso: $\boxed{\text{Braides}}$ $\boxed{\text{Tauraso}}$
Seconda Prova Intermedia (15/11/2001)
Risposta esatta: 3 punti, errata: -0.5 punti, vuota: 0 punti.

---

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(4x+1)^{5x}-1}{(7x+1)^{4x}-1} =$ $\boxed{A}$: $\frac{5}{4}$ $\boxed{B}$: 1 $\boxed{C}$: $\frac{11}{15}$ ● : $\frac{5}{7}$ $\boxed{E}$: $\frac{4}{7}$

---

2. L'asintoto obliquo della funzione $f(x) = \dfrac{4x^2}{x+3} + 5\dfrac{\sin x}{|x|}$ per $x \to +\infty$ è

$\boxed{A}$: $y = 4x + 5$ $\boxed{B}$: $y = 4x$ $\boxed{C}$: $y = 4x + 12$ ● : $y = 4x - 12$ $\boxed{E}$: $y = 5x + 12$

---

3. Il numero di massimi locali della funzione $f(x) = \begin{cases} |x|/4 & x \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Z} \\ 1 & x \in \mathbf{Z} \end{cases}$ è

$\boxed{A}$: 8 $\boxed{B}$: 0 ● : 7 $\boxed{D}$: ∞ $\boxed{E}$: 4

---

4. La retta tangente in $x = 1$ al grafico della funzione $f(x) = (5x+4)x^x$ è

● : $y = 14x - 5$ $\boxed{B}$: $y = -9x + 5$ $\boxed{C}$: $y = 14x$ $\boxed{D}$: $y = x$ $\boxed{E}$: $y = 9x + 5$

---

5. La funzione $f(x) = e^x(x-4)^2$ è decrescente nell'intervallo

$\boxed{A}$: $[2,5]$ $\boxed{B}$: $[1,2]$ $\boxed{C}$: $\mathbf{R}$ ● : $[2,4]$ $\boxed{E}$: $[1,4]$

---

6. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{\log 4}{4^x - 1}\right) =$ $\boxed{A}$: $+\infty$ $\boxed{B}$: $\log 4$ $\boxed{C}$: $\frac{1}{2}$ ● : $\frac{1}{2}\log 4$ $\boxed{E}$: 0

---

7. La funzione $f(x) = \dfrac{7x^2}{2\log|x|} + 6$ ha un punto di minimo in

$x =$ $\boxed{A}$: e^2 $\boxed{B}$: 6 $\boxed{C}$: $7e$ $\boxed{D}$: $\log 6$ ● : $\sqrt{e}$

---

8. $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2}\frac{\tan(7x)}{\tan(9x)} =$ $\boxed{A}$: 0 ● : $\frac{9}{7}$ $\boxed{C}$: 1 $\boxed{D}$: $\frac{7}{9}$ $\boxed{E}$: $-\infty$

---

9. La derivata di $\log(fg)$ è

$\boxed{A}$: $1/(fg)$ $\boxed{B}$: $f'\log g + g'\log f$ $\boxed{C}$: $\log(f'g + fg')$ $\boxed{D}$: $1/f + 1/g$ ● : $f'/f + g'/g$

---

10. La funzione $\sin(|x| - \frac{1}{2})$ ha esattamente

● : un punto angoloso in $x = 0$ $\boxed{B}$: infiniti punti angolosi $\boxed{C}$: una cuspide in $x = 0$
$\boxed{D}$: infinite cuspidi $\boxed{E}$: due punti angolosi in $x = \pm\frac{1}{2}$

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E	E	E

Cognome e nome: ⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌊

Analisi Matematica I (Ingegneria Informatica) Corso: Braides Tauraso
Seconda Prova Intermedia (15/11/2001)
Risposta esatta: 3 punti, errata: -0.5 punti, vuota: 0 punti.

---

1. L'asintoto obliquo della funzione $f(x) = \dfrac{5x^2}{x+4} + 6\dfrac{\sin x}{|x|}$ per $x \to +\infty$ è

A : $y = 6x + 20$ ● : $y = 5x - 20$ C : $y = 5x + 20$ D : $y = 5x$ E : $y = 5x + 6$

---

2. La derivata di $\log(fg)$ è

A : $1/f + 1/g$ ● : $f'/f + g'/g$ C : $1/(fg)$ D : $f' \log g + g' \log f$ E : $\log(f'g + fg')$

---

3. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{\log 5}{5^x - 1}\right) =$ ● : $\frac{1}{2}\log 5$ B : $\log 5$ C : 0 D : $\frac{1}{2}$ E : $+\infty$

---

4. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(5x+1)^{6x} - 1}{(8x+1)^{5x} - 1} =$ A : $\frac{5}{8}$ ● : $\frac{3}{4}$ C : $\frac{6}{5}$ D : 1 E : $\frac{16}{21}$

---

5. $\displaystyle\lim_{x\to \pi/2}\frac{\tan(9x)}{\tan(11x)} =$ A : $-\infty$ ● : $\frac{11}{9}$ C : 1 D : $\frac{9}{11}$ E : 0

---

6. La funzione $f(x) = e^x(x-5)^2$ è decrescente nell'intervallo

A : $[2, 5]$ B : $[2, 3]$ C : $[3, 6]$ ● : $[3, 5]$ E : $\mathbf{R}$

---

7. Il numero di massimi locali della funzione $f(x) = \begin{cases} |x|/5 & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z} \\ 1 & x \in \mathbf{Z} \end{cases}$ è

A : 0 ● : 9 C : ∞ D : 10 E : 5

---

8. La funzione $\sin(|x| - \dfrac{1}{2})$ ha esattamente

● : un punto angoloso in $x = 0$ B : infiniti punti angolosi C : una cuspide in $x = 0$
D : infinite cuspidi E : due punti angolosi in $x = \pm\frac{1}{2}$

---

9. La funzione $f(x) = \dfrac{9x^2}{2\log|x|} + 8$ ha un punto di minimo in

$x =$ A : e^2 B : 8 C : $9e$ D : $\log 8$ ● : $\sqrt{e}$

---

10. La retta tangente in $x = 1$ al grafico della funzione $f(x) = (6x+5)x^x$ è

● : $y = 17x - 6$ B : $y = -11x + 6$ C : $y = 17x$ D : $y = x$ E : $y = 11x + 6$

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E	E	E

Cognome e nome: ____________________________

Analisi Matematica I (Ingegneria Informatica) Corso: $\boxed{\text{Braides}}$ $\boxed{\text{Tauraso}}$
Seconda Prova Intermedia (15/11/2001)
Risposta esatta: 3 punti, errata: -0.5 punti, vuota: 0 punti.

---

1. La retta tangente in $x = 1$ al grafico della funzione $f(x) = (7x + 6)x^x$ è
$\boxed{A}$: $y = -13x + 7$ $\boxed{B}$: $y = x$ $\boxed{C}$: $y = 13x + 7$ $\boxed{\bullet}$: $y = 20x - 7$ $\boxed{E}$: $y = 20x$

---

2. Il numero di massimi locali della funzione $f(x) = \begin{cases} |x|/6 & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z} \\ 1 & x \in \mathbf{Z} \end{cases}$ è

$\boxed{A}$: 12 $\boxed{B}$: 0 $\boxed{\bullet}$: 11 $\boxed{D}$: ∞ $\boxed{E}$: 6

---

3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(6x+1)^{7x} - 1}{(9x+1)^{6x} - 1} =$ $\boxed{\bullet}$: $\frac{7}{9}$ $\boxed{B}$: $\frac{7}{6}$ $\boxed{C}$: $\frac{11}{14}$ $\boxed{D}$: $\frac{2}{3}$ $\boxed{E}$: 1

---

4. La derivata di $\log(fg)$ è
$\boxed{A}$: $1/(fg)$ $\boxed{B}$: $f' \log g + g' \log f$ $\boxed{C}$: $\log(f'g + fg')$ $\boxed{D}$: $1/f + 1/g$ $\boxed{\bullet}$: $f'/f + g'/g$

---

5. La funzione $f(x) = \dfrac{11x^2}{2\log|x|} + 10$ ha un punto di minimo in

$x =$ $\boxed{\bullet}$: $\sqrt{e}$ $\boxed{B}$: 10 $\boxed{C}$: e^2 $\boxed{D}$: $\log 10$ $\boxed{E}$: $11e$

---

6. La funzione $f(x) = e^x(x-6)^2$ è decrescente nell'intervallo
$\boxed{A}$: $[3,6]$ $\boxed{B}$: $[3,4]$ $\boxed{C}$: $[4,7]$ $\boxed{\bullet}$: $[4,6]$ $\boxed{E}$: $\mathbf{R}$

---

7. L'asintoto obliquo della funzione $f(x) = \dfrac{6x^2}{x+5} + 7\dfrac{\sin x}{|x|}$ per $x \to +\infty$ è

$\boxed{\bullet}$: $y = 6x - 30$ $\boxed{B}$: $y = 6x$ $\boxed{C}$: $y = 6x + 7$ $\boxed{D}$: $y = 6x + 30$ $\boxed{E}$: $y = 7x + 30$

---

8. La funzione $\sin(|x| - \dfrac{1}{2})$ ha esattamente
$\boxed{A}$: infiniti punti angolosi $\boxed{B}$: una cuspide in $x = 0$ $\boxed{\bullet}$: un punto angoloso in $x = 0$
$\boxed{D}$: infinite cuspidi $\boxed{E}$: due punti angolosi in $x = \pm\frac{1}{2}$

---

9. $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2} \frac{\tan(11x)}{\tan(13x)} =$ $\boxed{A}$: 0 $\boxed{B}$: 1 $\boxed{\bullet}$: $\frac{13}{11}$ $\boxed{D}$: $-\infty$ $\boxed{E}$: $\frac{11}{13}$

---

10. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{\log 6}{6^x - 1}\right) =$ $\boxed{A}$: $+\infty$ $\boxed{B}$: $\log 6$ $\boxed{C}$: $\frac{1}{2}$ $\boxed{\bullet}$: $\frac{1}{2}\log 6$ $\boxed{E}$: 0

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E	E	E

Cognome e nome: $\underline{\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad}$

Analisi Matematica I (Ingegneria Informatica) Corso: $\boxed{\text{Braides}}$ $\boxed{\text{Tauraso}}$

Seconda Prova Intermedia (15/11/2001)

Risposta esatta: 3 punti, errata: -0.5 punti, vuota: 0 punti.

---

1. Il numero di massimi locali della funzione $f(x) = \begin{cases} |x|/7 & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z} \\ 1 & x \in \mathbf{Z} \end{cases}$ è

$\boxed{\bullet}$: 13 $\boxed{\text{B}}$: 0 $\boxed{\text{C}}$: 14 $\boxed{\text{D}}$: ∞ $\boxed{\text{E}}$: 7

---

2. La funzione $f(x) = \dfrac{13x^2}{2\log|x|} + 12$ ha un punto di minimo in

$x =$ $\boxed{\text{A}}$: $\log 12$ $\boxed{\text{B}}$: $13e$ $\boxed{\text{C}}$: e^2 $\boxed{\text{D}}$: 12 $\boxed{\bullet}$: $\sqrt{e}$

---

3. L'asintoto obliquo della funzione $f(x) = \dfrac{7x^2}{x+6} + 8\,\dfrac{\sin x}{|x|}$ per $x \to +\infty$ è

$\boxed{\text{A}}$: $y = 7x + 8$ $\boxed{\bullet}$: $y = 7x - 42$ $\boxed{\text{C}}$: $y = 7x$ $\boxed{\text{D}}$: $y = 8x + 42$ $\boxed{\text{E}}$: $y = 7x + 42$

---

4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{\log 7}{7^x - 1} \right) =$ $\boxed{\bullet}$: $\frac{1}{2}\log 7$ $\boxed{\text{B}}$: $\log 7$ $\boxed{\text{C}}$: 0 $\boxed{\text{D}}$: $\frac{1}{2}$ $\boxed{\text{E}}$: $+\infty$

---

5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(7x+1)^{8x} - 1}{(10x+1)^{7x} - 1} =$ $\boxed{\text{A}}$: 1 $\boxed{\bullet}$: $\frac{4}{5}$ $\boxed{\text{C}}$: $\frac{29}{36}$ $\boxed{\text{D}}$: $\frac{7}{10}$ $\boxed{\text{E}}$: $\frac{8}{7}$

---

6. La funzione $f(x) = e^x(x-7)^2$ è decrescente nell'intervallo

$\boxed{\text{A}}$: $[5, 8]$ $\boxed{\text{B}}$: $[4, 5]$ $\boxed{\text{C}}$: $\mathbf{R}$ $\boxed{\bullet}$: $[5, 7]$ $\boxed{\text{E}}$: $[4, 7]$

---

7. La funzione $\sin(|x| - \dfrac{1}{2})$ ha esattamente

$\boxed{\text{A}}$: due punti angolosi in $x = \pm\frac{1}{2}$ $\boxed{\bullet}$: un punto angoloso in $x = 0$ $\boxed{\text{C}}$: infiniti punti angolosi

$\boxed{\text{D}}$: una cuspide in $x = 0$ $\boxed{\text{E}}$: infinite cuspidi

---

8. La retta tangente in $x = 1$ al grafico della funzione $f(x) = (8x + 7)x^x$ è

$\boxed{\text{A}}$: $y = 23x$ $\boxed{\text{B}}$: $y = x$ $\boxed{\text{C}}$: $y = 15x + 8$ $\boxed{\bullet}$: $y = 23x - 8$ $\boxed{\text{E}}$: $y = -15x + 8$

---

9. La derivata di $\log(fg)$ è

$\boxed{\text{A}}$: $f'\log g + g'\log f$ $\boxed{\text{B}}$: $\log(f'g + fg')$ $\boxed{\text{C}}$: $1/(fg)$ $\boxed{\bullet}$: $f'/f + g'/g$ $\boxed{\text{E}}$: $1/f + 1/g$

---

10. $\displaystyle\lim_{x\to \pi/2} \frac{\tan(13x)}{\tan(15x)} =$ $\boxed{\text{A}}$: 0 $\boxed{\text{B}}$: 1 $\boxed{\bullet}$: $\frac{15}{13}$ $\boxed{\text{D}}$: $-\infty$ $\boxed{\text{E}}$: $\frac{13}{15}$

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E	E	E

Cognome e nome: ⌴⌴⌴⌴⌴⌴⌴⌴⌴⌴⌴⌴⌴⌴⌴⌴⌴⌴⌴⌴⌴⌴⌴⌴⌴⌴⌴

Analisi Matematica I (Ingegneria Informatica) Corso: $\boxed{\text{Braides}}$ $\boxed{\text{Tauraso}}$
Terza Prova Intermedia (26/11/2001)
Risposta esatta: 3 punti, errata: -0.5 punti, vuota: 0 punti.

---

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(x-2)\tan(\sin x)+2x}{\sqrt{1+x^2}-\cos 3x}=$ $\boxed{A}:\frac{2}{3}$ $\boxed{B}:\frac{2}{9}$ ● $:\frac{1}{5}$ $\boxed{D}:1$ $\boxed{E}:\frac{1}{2}$

---

2. La derivata destra di $f(x)=(|3-x|+|x|)^2$ in 0 vale
$\boxed{A}:2$ ● $:0$ $\boxed{C}:1$ $\boxed{D}:+\infty$ $\boxed{E}:3$

---

3. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\tan(\pi(3x^2-5x+3))}{\log(5x^2-9x+5)}=$ $\boxed{A}:\frac{3}{5}$ $\boxed{B}:\frac{5}{9}$ $\boxed{C}:\frac{5}{3}$ ● $:\pi$ $\boxed{E}:2\pi$

---

4. Il numero di massimi locali della funzione $f(x)=\begin{cases} 9/(1+x^2) & x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Z} \\ (-1)^x & x\in\mathbf{Z}\end{cases}$ è

$\boxed{A}:10$ $\boxed{B}:9$ ● $:\infty$ $\boxed{D}:1$ $\boxed{E}:0$

---

5. La funzione $\dfrac{x^2+7x+50}{x^2+7x+49}$ è concava in
● $:[-7,0]$ $\boxed{B}:[-8,-2]$ $\boxed{C}:[0,7]$ $\boxed{D}:[2,8]$ $\boxed{E}:[-1,1]$

---

6. La funzione $f(x)=1-|x-1|$ è convessa in
$\boxed{A}:[-2,3]$ ● $:[1,6]$ $\boxed{C}:[-1,4]$ $\boxed{D}:[0,5]$ $\boxed{E}:[-3,2]$

---

7. Il polinomio di Taylor di ordine 3 e centro $x_0=0$ della funzione $f(x)=1/\cos(2x)$ è
$\boxed{A}:1+2x^2+\frac{2}{3}x^3$ $\boxed{B}:1-x+x^2-x^3$ $\boxed{C}:1+x^2+\frac{3}{2}x^3$ $\boxed{D}:1+2x^2+\frac{3}{2}x^3$ ● $:1+2x^2$

---

8. La funzione $f(x)=\dfrac{e^x+2}{e^x+7}$ ha un punto di flesso in
$\boxed{A}:2$ $\boxed{B}:\log 2$ ● $:\log 7$ $\boxed{D}:7$ $\boxed{E}:\frac{2}{7}$

---

9. Il polinomio di Taylor di ordine 3 e centro $x_0=0$ della funzione $f(x)=(x-2)\tan(\sin x)$ è
$\boxed{A}:-2x+x^2+\frac{1}{3}x^3$ ● $:-2x+x^2-\frac{1}{3}x^3$ $\boxed{C}:-2x+\frac{1}{3}x^3$ $\boxed{D}:-2x+x^2-\frac{2}{3}x^3$ $\boxed{E}:-2x-\frac{2}{3}x^3$

---

10. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x\left(\left(1+\frac{3}{x}\right)^x-e^3\right)=$ $\boxed{A}:2e^4$ $\boxed{B}:1$ $\boxed{C}:2e^3$ $\boxed{D}:\frac{9}{2}e^4$ ● $:-\frac{9}{2}e^3$

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E	E	E

Cognome e nome: $\sqcup$

Analisi Matematica I (Ingegneria Informatica) Corso: $\boxed{\text{Braides}}$ $\boxed{\text{Tauraso}}$
Terza Prova Intermedia (26/11/2001)
Risposta esatta: 3 punti, errata: -0.5 punti, vuota: 0 punti.

---

1. La funzione $f(x) = 1 - |x-1|$ è convessa in
$\boxed{\text{A}}$: $[-2,3]$ $\boxed{\bullet}$: $[1,6]$ $\boxed{\text{C}}$: $[-1,4]$ $\boxed{\text{D}}$: $[0,5]$ $\boxed{\text{E}}$: $[-3,2]$

---

2. La funzione $\dfrac{x^2+6x+37}{x^2+6x+36}$ è concava in
$\boxed{\text{A}}$: $[2,7]$ $\boxed{\text{B}}$: $[-1,1]$ $\boxed{\bullet}$: $[-6,0]$ $\boxed{\text{D}}$: $[-7,-2]$ $\boxed{\text{E}}$: $[0,6]$

---

3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(\left(1+\frac{4}{x}\right)^x - e^4\right) =$ $\boxed{\text{A}}$: $2e^5$ $\boxed{\text{B}}$: 1 $\boxed{\text{C}}$: $\frac{5}{2}e^4$ $\boxed{\text{D}}$: $8e^5$ $\boxed{\bullet}$: $-8e^4$

---

4. Il numero di massimi locali della funzione $f(x) = \begin{cases} 8/(1+x^2) & x \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Z} \\ (-1)^x & x \in \mathbf{Z} \end{cases}$ è

$\boxed{\text{A}}$: 0 $\boxed{\bullet}$: ∞ $\boxed{\text{C}}$: 1 $\boxed{\text{D}}$: 8 $\boxed{\text{E}}$: 9

---

5. Il polinomio di Taylor di ordine 3 e centro $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = (x-3)\tan(\sin x)$ è
$\boxed{\text{A}}$: $-3x+x^2-\frac{5}{6}x^3$ $\boxed{\text{B}}$: $-3x-\frac{5}{6}x^3$ $\boxed{\text{C}}$: $-3x+x^2+\frac{1}{2}x^3$ $\boxed{\bullet}$: $-3x+x^2-\frac{1}{2}x^3$ $\boxed{\text{E}}$: $-3x+\frac{1}{2}x^3$

---

6. $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\tan(\pi(4x^2-7x+4))}{\log(6x^2-11x+6)} =$ $\boxed{\text{A}}$: $\frac{2}{3}$ $\boxed{\bullet}$: π $\boxed{\text{C}}$: $\frac{7}{11}$ $\boxed{\text{D}}$: 2π $\boxed{\text{E}}$: $\frac{3}{2}$

---

7. La funzione $f(x) = \dfrac{e^x+3}{e^x+6}$ ha un punto di flesso in
$\boxed{\bullet}$: $\log 6$ $\boxed{\text{B}}$: 3 $\boxed{\text{C}}$: $\log 3$ $\boxed{\text{D}}$: $\frac{1}{2}$ $\boxed{\text{E}}$: 6

---

8. La derivata destra di $f(x) = (|5-x|+|x|)^2$ in 0 vale
$\boxed{\text{A}}$: 5 $\boxed{\text{B}}$: 1 $\boxed{\bullet}$: 0 $\boxed{\text{D}}$: $+\infty$ $\boxed{\text{E}}$: 4

---

9. Il polinomio di Taylor di ordine 3 e centro $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = 1/\cos(2x)$ è
$\boxed{\text{A}}$: $1-x+x^2-x^3$ $\boxed{\text{B}}$: $1+2x^2+\frac{2}{3}x^3$ $\boxed{\text{C}}$: $1+2x^2+\frac{3}{2}x^3$ $\boxed{\text{D}}$: $1+x^2+\frac{3}{2}x^3$ $\boxed{\bullet}$: $1+2x^2$

---

10. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{(x-3)\tan(\sin x)+3x}{\sqrt{1+x^2}-\cos 4x} =$ $\boxed{\text{A}}$: $\frac{1}{2}$ $\boxed{\text{B}}$: $\frac{1}{8}$ $\boxed{\bullet}$: $\frac{2}{17}$ $\boxed{\text{D}}$: $\frac{2}{3}$ $\boxed{\text{E}}$: $\frac{2}{5}$

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E	E	E

Cognome e nome: $\sqcup$

Analisi Matematica I (Ingegneria Informatica) Corso: $\boxed{\text{Braides}}$ $\boxed{\text{Tauraso}}$
Terza Prova Intermedia (26/11/2001)
Risposta esatta: 3 punti, errata: -0.5 punti, vuota: 0 punti.

---

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(x-4)\tan(\sin x)+4x}{\sqrt{1+x^2}-\cos 5x}=$ $\boxed{A}$: $\frac{2}{5}$ $\boxed{B}$: $\frac{1}{2}$ $\boxed{C}$: $\frac{2}{25}$ $\boxed{D}$: $\frac{1}{3}$ $\boxed{\bullet}$: $\frac{1}{13}$

---

2. La funzione $f(x)=\dfrac{e^x+4}{e^x+5}$ ha un punto di flesso in
$\boxed{\bullet}$: $\log 5$ $\boxed{B}$: $\log 4$ $\boxed{C}$: 5 $\boxed{D}$: 4 $\boxed{E}$: $\frac{4}{5}$

---

3. Il numero di massimi locali della funzione $f(x)=\begin{cases} 7/(1+x^2) & x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Z} \\ (-1)^x & x\in\mathbf{Z}\end{cases}$ è
$\boxed{A}$: 7 $\boxed{B}$: 0 $\boxed{\bullet}$: ∞ $\boxed{D}$: 1 $\boxed{E}$: 8

---

4. Il polinomio di Taylor di ordine 3 e centro $x_0=0$ della funzione $f(x)=1/\cos(2x)$ è
$\boxed{A}$: $1+2x^2+\frac{3}{2}x^3$ $\boxed{\bullet}$: $1+2x^2$ $\boxed{C}$: $1+2x^2+\frac{2}{3}x^3$ $\boxed{D}$: $1-x+x^2-x^3$ $\boxed{E}$: $1+x^2+\frac{3}{2}x^3$

---

5. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\tan(\pi(2x^2-3x+2))}{\log(4x^2-7x+4)}=$ $\boxed{A}$: $\frac{1}{2}$ $\boxed{B}$: 2π $\boxed{\bullet}$: π $\boxed{D}$: $\frac{3}{7}$ $\boxed{E}$: 2

---

6. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(\left(1+\frac{2}{x}\right)^x-e^2\right)=$ $\boxed{A}$: $2e^3$ $\boxed{B}$: $2e^3$ $\boxed{\bullet}$: $-2e^2$ $\boxed{D}$: $\frac{3}{2}e^2$ $\boxed{E}$: 1

---

7. La funzione $f(x)=1-|x-1|$ è convessa in
$\boxed{A}$: $[-1,4]$ $\boxed{B}$: $[0,5]$ $\boxed{\bullet}$: $[1,6]$ $\boxed{D}$: $[-2,3]$ $\boxed{E}$: $[-3,2]$

---

8. La derivata destra di $f(x)=(|7-x|+|x|)^2$ in 0 vale
$\boxed{A}$: 7 $\boxed{\bullet}$: 0 $\boxed{C}$: 1 $\boxed{D}$: 6 $\boxed{E}$: $+\infty$

---

9. Il polinomio di Taylor di ordine 3 e centro $x_0=0$ della funzione $f(x)=(x-4)\tan(\sin x)$ è
$\boxed{A}$: $-4x+x^2+\frac{2}{3}x^3$ $\boxed{\bullet}$: $-4x+x^2-\frac{2}{3}x^3$ $\boxed{C}$: $-4x+\frac{2}{3}x^3$ $\boxed{D}$: $-4x+x^2-1x^3$ $\boxed{E}$: $-4x-1x^3$

---

10. La funzione $\dfrac{x^2+5x+26}{x^2+5x+25}$ è concava in
$\boxed{\bullet}$: $[-5,0]$ $\boxed{B}$: $[-6,-2]$ $\boxed{C}$: $[0,5]$ $\boxed{D}$: $[2,6]$ $\boxed{E}$: $[-1,1]$

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E	E	E

Cognome e nome: |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|

Analisi Matematica I (Ingegneria Informatica) Corso: Braides Tauraso
Terza Prova Intermedia (26/11/2001)
Risposta esatta: 3 punti, errata: -0.5 punti, vuota: 0 punti.

---

1. La funzione $f(x) = \dfrac{e^x + 5}{e^x + 4}$ ha un punto di flesso in

A : $\frac{5}{4}$ B : 5 C : 4 D : $\log 5$ ● : $\log 4$

---

2. Il polinomio di Taylor di ordine 3 e centro $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = (x-5)\tan(\sin x)$ è

A : $-5x + x^2 - \frac{7}{6}x^3$ B : $-5x - \frac{7}{6}x^3$ C : $-5x + x^2 + \frac{5}{6}x^3$ ● : $-5x + x^2 - \frac{5}{6}x^3$ E : $-5x + \frac{5}{6}x^3$

---

3. $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} x\left(\left(1+\frac{3}{x}\right)^x - e^3\right) =$ A : $2e^3$ B : $2e^4$ C : 1 ● : $-\frac{9}{2}e^3$ E : $\frac{9}{2}e^4$

---

4. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{(x-5)\tan(\sin x) + 5x}{\sqrt{1+x^2} - \cos 6x} =$ ● : $\frac{2}{37}$ B : $\frac{2}{7}$ C : $\frac{1}{3}$ D : $\frac{2}{5}$ E : $\frac{1}{18}$

---

5. La derivata destra di $f(x) = (|9-x| + |x|)^2$ in 0 vale

A : $+\infty$ ● : 0 C : 1 D : 8 E : 9

---

6. $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{\tan(\pi(3x^2 - 5x + 3))}{\log(5x^2 - 9x + 5)} =$ A : $\frac{5}{3}$ B : 2π C : $\frac{3}{5}$ D : $\frac{5}{9}$ ● : π

---

7. Il numero di massimi locali della funzione $f(x) = \begin{cases} 6/(1+x^2) & x \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Z} \\ (-1)^x & x \in \mathbf{Z} \end{cases}$ è

A : 0 ● : ∞ C : 1 D : 6 E : 7

---

8. La funzione $\dfrac{x^2 + 4x + 17}{x^2 + 4x + 16}$ è concava in

● : $[-4, 0]$ B : $[-5, -2]$ C : $[0, 4]$ D : $[2, 5]$ E : $[-1, 1]$

---

9. La funzione $f(x) = 1 - |x-1|$ è convessa in

A : $[-1, 4]$ B : $[0, 5]$ ● : $[1, 6]$ D : $[-2, 3]$ E : $[-3, 2]$

---

10. Il polinomio di Taylor di ordine 3 e centro $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = 1/\cos(2x)$ è

A : $1 + 2x^2 + \frac{3}{2}x^3$ ● : $1 + 2x^2$ C : $1 + 2x^2 + \frac{2}{3}x^3$ D : $1 - x + x^2 - x^3$ E : $1 + x^2 + \frac{3}{2}x^3$

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E	E	E

Cognome e nome: |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|

Analisi Matematica I (Ingegneria Informatica) Corso: Braides Tauraso
Terza Prova Intermedia (26/11/2001)
Risposta esatta: 3 punti, errata: -0.5 punti, vuota: 0 punti.

---

1. Il polinomio di Taylor di ordine 3 e centro $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = 1/\cos(2x)$ è
● : $1 + 2x^2$ B : $1 - x + x^2 - x^3$ C : $1 + x^2 + \frac{3}{2}x^3$ D : $1 + 2x^2 + \frac{3}{2}x^3$ E : $1 + 2x^2 + \frac{2}{3}x^3$

---

2. Il numero di massimi locali della funzione $f(x) = \begin{cases} 5/(1+x^2) & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z} \\ (-1)^x & x \in \mathbf{Z} \end{cases}$ è

A : 5 B : 0 ● : ∞ D : 1 E : 6

---

3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(x-6)\tan(\sin x) + 6x}{\sqrt{1+x^2} - \cos 7x} =$ A : $\frac{1}{4}$ B : $\frac{2}{7}$ C : $\frac{2}{49}$ ● : $\frac{1}{25}$ E : $\frac{1}{3}$

---

4. Il polinomio di Taylor di ordine 3 e centro $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = (x-6)\tan(\sin x)$ è
A : $-6x + x^2 + 1x^3$ ● : $-6x + x^2 - 1x^3$ C : $-6x + 1x^3$ D : $-6x + x^2 - \frac{4}{3}x^3$ E : $-6x - \frac{4}{3}x^3$

---

5. La funzione $f(x) = 1 - |x - 1|$ è convessa in
A : $[-3, 2]$ B : $[0, 5]$ C : $[-1, 4]$ D : $[-2, 3]$ ● : $[1, 6]$

---

6. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\tan(\pi(4x^2 - 7x + 4))}{\log(6x^2 - 11x + 6)} =$ A : $\frac{3}{2}$ B : 2π C : $\frac{2}{3}$ D : $\frac{7}{11}$ ● : π

---

7. La funzione $f(x) = \dfrac{e^x + 6}{e^x + 3}$ ha un punto di flesso in
A : 6 B : $\log 6$ ● : $\log 3$ D : 3 E : 2

---

8. La funzione $\dfrac{x^2 + 3x + 10}{x^2 + 3x + 9}$ è concava in
A : $[-4, -2]$ B : $[0, 3]$ ● : $[-3, 0]$ D : $[2, 4]$ E : $[-1, 1]$

---

9. La derivata destra di $f(x) = (|11 - x| + |x|)^2$ in 0 vale
A : 11 B : 1 ● : 0 D : $+\infty$ E : 10

---

10. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x\left(\left(1 + \frac{4}{x}\right)^x - e^4\right) =$ A : $8e^5$ B : $2e^5$ ● : $-8e^4$ D : $\frac{5}{2}e^4$ E : 1

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E	E	E

Cognome e nome: ⎵⎵⎵⎵⎵⎵⎵⎵⎵⎵⎵⎵⎵⎵⎵⎵⎵⎵⎵⎵⎵⎵⎵⎵⎵⎵⎵

Analisi Matematica I (Ingegneria Informatica) Corso: Braides Tauraso
Terza Prova Intermedia (26/11/2001)
Risposta esatta: 3 punti, errata: -0.5 punti, vuota: 0 punti.

---

1. Il numero di massimi locali della funzione $f(x) = \begin{cases} 4/(1+x^2) & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z} \\ (-1)^x & x \in \mathbf{Z} \end{cases}$ è

●: ∞ B : 0 C : 4 D : 1 E : 5

---

2. La funzione $f(x) = 1 - |x-1|$ è convessa in
A : $[-2,3]$ ● : $[1,6]$ C : $[-1,4]$ D : $[0,5]$ E : $[-3,2]$

---

3. La funzione $f(x) = \dfrac{e^x+7}{e^x+2}$ ha un punto di flesso in
● : $\log 2$ B : 7 C : $\log 7$ D : $\frac{7}{2}$ E : 2

---

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x - e^2\right) =$ A : $\frac{3}{2}e^2$ B : $2e^3$ C : 1 ● : $-2e^2$ E : $2e^3$

---

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x-7)\tan(\sin x)+7x}{\sqrt{1+x^2}-\cos 8x} =$ A : $\frac{2}{7}$ B : $\frac{2}{9}$ C : $\frac{1}{32}$ ● : $\frac{2}{65}$ E : $\frac{1}{4}$

---

6. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\tan(\pi(2x^2-3x+2))}{\log(4x^2-7x+4)} =$ A : $\frac{1}{2}$ B : 2π ● : π D : $\frac{3}{7}$ E : 2

---

7. La funzione $\dfrac{x^2+2x+5}{x^2+2x+4}$ è concava in
A : $[-1,1]$ ● : $[-2,0]$ C : $[-3,-2]$ D : $[0,2]$ E : $[2,3]$

---

8. Il polinomio di Taylor di ordine 3 e centro $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = 1/\cos(2x)$ è
A : $1+2x^2+\frac{2}{3}x^3$ B : $1-x+x^2-x^3$ C : $1+x^2+\frac{3}{2}x^3$ D : $1+2x^2+\frac{3}{2}x^3$ ● : $1+2x^2$

---

9. Il polinomio di Taylor di ordine 3 e centro $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = (x-7)\tan(\sin x)$ è
● : $-7x+x^2-\frac{7}{6}x^3$ B : $-7x+\frac{7}{6}x^3$ C : $-7x+x^2+\frac{7}{6}x^3$ D : $-7x-\frac{3}{2}x^3$ E : $-7x+x^2-\frac{3}{2}x^3$

---

10. La derivata destra di $f(x) = (|13-x|+|x|)^2$ in 0 vale
A : 13 B : 1 ● : 0 D : $+\infty$ E : 12

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E	E	E

Cognome e nome: $\sqcup$

Analisi Matematica I (Ingegneria Informatica) Corso: $\boxed{\text{Braides}}$ $\boxed{\text{Tauraso}}$
Primo Appello (29/11/2001)
Risposta esatta: 3 punti, errata: -0.5 punti, vuota: 0 punti.

---

1. $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\pi}{2}-\arctan 7x\right)^x =$ $\boxed{A}: e^8$ $\boxed{\bullet}: e^{1/7}$ $\boxed{C}: e^7$ $\boxed{D}: e$ $\boxed{E}: e^{1/8}$

---

2. La derivata sinistra di $f(x) = 4\sqrt{\sin x^2} + 7\sqrt{\cos x^2}$ in 0 vale
$\boxed{A}: 7$ $\boxed{B}: 11$ $\boxed{\bullet}: -4$ $\boxed{D}: -7$ $\boxed{E}: 4$

---

3. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+6x}+\sqrt[3]{1-6x}-2}{\sqrt[2]{1+14x}+\sqrt[2]{1-14x}-2} =$ $\boxed{A}: \frac{3}{7}$ $\boxed{B}: \frac{12}{49}$ $\boxed{C}: 0$ $\boxed{\bullet}: \frac{8}{49}$ $\boxed{E}: -1$

---

4. Il numero di minimi locali della funzione $f(x) = \begin{cases} 4x^2 & x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Z} \\ x^4 & x\in\mathbf{Z}\end{cases}$ è

$\boxed{A}: 2$ $\boxed{\bullet}: 3$ $\boxed{C}: \infty$ $\boxed{D}: 5$ $\boxed{E}: 0$

---

5. L'asintoto della funzione $\log(7^x + 15x - 8)$ per $x\to+\infty$ è
$\boxed{A}: y = (\log 7)x - \log 8$ $\boxed{\bullet}: y = (\log 7)x$ $\boxed{C}: y = 15x - 8$ $\boxed{D}: y = 7x + 15$ $\boxed{E}: y = (\log 8)x$

---

6. La funzione $f(x) = -\arctan|x-\pi|$ è convessa in
$\boxed{\bullet}: [4, 8]$ $\boxed{B}: [1, 5]$ $\boxed{C}: [3, 7]$ $\boxed{D}: [2, 6]$ $\boxed{E}: [0, 4]$

---

7. Il dominio della funzione $f(x) = \log(1 - \sin(\cos x))$ è
$\boxed{A}: \mathbf{R}\setminus\{0\}$ $\boxed{B}: (-\infty, 1)$ $\boxed{C}: (0, +\infty)$ $\boxed{\bullet}: \mathbf{R}$ $\boxed{E}: [-1, 1]$

---

8. La funzione $f(x) = (x-3)|x^2-3|$ ha un punto di flesso in
$\boxed{A}: -1$ $\boxed{B}: 2$ $\boxed{\bullet}: \sqrt{3}$ $\boxed{D}: \sqrt{2}$ $\boxed{E}: 3$

---

9. Il polinomio di Taylor di ordine 4 e centro $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = (x-5)\log(e^x - x)$ è
$\boxed{A}: -\frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$ $\boxed{B}: -\frac{5}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4$ $\boxed{\bullet}: -\frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{12}x^4$
$\boxed{D}: -\frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4$ $\boxed{E}: -\frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4$

---

10. L'estremo inferiore dell'insieme $\left\{\log\left|\frac{1+3x}{1-13x}\right| : x > \frac{1}{13}\right\}$
$\boxed{\bullet}: \log 3 - \log 13$ $\boxed{B}: 1$ $\boxed{C}: \log 13 - \log 3$ $\boxed{D}: \log 13$ $\boxed{E}: \log 3$

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E	E	E

Cognome e nome:

Analisi Matematica I (Ingegneria Informatica) Corso: $\boxed{\text{Braides}}$ $\boxed{\text{Tauraso}}$
Primo Appello (29/11/2001)
Risposta esatta: 3 punti, errata: -0.5 punti, vuota: 0 punti.

---

1. La funzione $f(x) = -\arctan|x-\pi|$ è convessa in
$\boxed{\bullet}$: $[4,8]$ $\boxed{B}$: $[1,5]$ $\boxed{C}$: $[3,7]$ $\boxed{D}$: $[2,6]$ $\boxed{E}$: $[0,4]$

---

2. L'asintoto della funzione $\log(6^x + 13x - 7)$ per $x \to +\infty$ è
$\boxed{A}$: $y = 6x + 13$ $\boxed{B}$: $y = (\log 7)x$ $\boxed{C}$: $y = (\log 6)x - \log 7$ $\boxed{\bullet}$: $y = (\log 6)x$ $\boxed{E}$: $y = 13x - 7$

---

3. L'estremo inferiore dell'insieme $\left\{\log\left|\dfrac{1+4x}{1-12x}\right| : x > \dfrac{1}{12}\right\}$
$\boxed{\bullet}$: $\log 4 - \log 12$ $\boxed{B}$: 1 $\boxed{C}$: $\log 12 - \log 4$ $\boxed{D}$: $\log 12$ $\boxed{E}$: $\log 4$

---

4. Il numero di minimi locali della funzione $f(x) = \begin{cases} 9x^2 & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z} \\ x^4 & x \in \mathbf{Z} \end{cases}$ è
$\boxed{A}$: 0 $\boxed{B}$: ∞ $\boxed{C}$: 7 $\boxed{\bullet}$: 5 $\boxed{E}$: 3

---

5. Il polinomio di Taylor di ordine 4 e centro $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = (x-6)\log(e^x - x)$ è
$\boxed{A}$: $-3x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4$ $\boxed{B}$: $-3x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^4$ $\boxed{C}$: $-3x^2 + \frac{1}{2}x^3$
$\boxed{D}$: $-3x^2 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^4$ $\boxed{\bullet}$: $-3x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{2}{3}x^4$

---

6. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+9x} + \sqrt[3]{1-9x} - 2}{\sqrt[2]{1+20x} + \sqrt[2]{1-20x} - 2} =$ $\boxed{A}$: $\frac{9}{20}$ $\boxed{\bullet}$: $\frac{9}{50}$ $\boxed{C}$: $\frac{27}{100}$ $\boxed{D}$: -1 $\boxed{E}$: 0

---

7. La funzione $f(x) = (x-2)|x^2-2|$ ha un punto di flesso in
$\boxed{\bullet}$: $\sqrt{2}$ $\boxed{B}$: $-\frac{2}{3}$ $\boxed{C}$: 3 $\boxed{D}$: 2 $\boxed{E}$: $\sqrt{3}$

---

8. La derivata sinistra di $f(x) = 5\sqrt{\sin x^2} + 6\sqrt{\cos x^2}$ in 0 vale
$\boxed{A}$: 5 $\boxed{\bullet}$: -5 $\boxed{C}$: 11 $\boxed{D}$: -6 $\boxed{E}$: 6

---

9. Il dominio della funzione $f(x) = \log(1 - \sin(\cos x))$ è
$\boxed{A}$: $(-\infty, 1)$ $\boxed{B}$: $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ $\boxed{\bullet}$: $\mathbf{R}$ $\boxed{D}$: $(0, +\infty)$ $\boxed{E}$: $[-1, 1]$

---

10. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{\pi}{2} - \arctan 6x\right)^x =$ $\boxed{A}$: e^7 $\boxed{\bullet}$: $e^{1/6}$ $\boxed{C}$: e^6 $\boxed{D}$: e $\boxed{E}$: $e^{1/7}$

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E	E	E

Cognome e nome: _

Analisi Matematica I (Ingegneria Informatica) Corso: $\boxed{\text{Braides}}$ $\boxed{\text{Tauraso}}$
Primo Appello (29/11/2001)
Risposta esatta: 3 punti, errata: -0.5 punti, vuota: 0 punti.

---

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\pi}{2}-\arctan 5x\right)^x =$ $\boxed{A}: e^6$ $\boxed{B}: e$ $\boxed{\bullet}: e^{1/5}$ $\boxed{D}: e^{1/6}$ $\boxed{E}: e^5$

---

2. La funzione $f(x) = (x-3)|x^2-3|$ ha un punto di flesso in
$\boxed{\bullet}: \sqrt{3}$ $\boxed{B}: 2$ $\boxed{C}: \sqrt{2}$ $\boxed{D}: -1$ $\boxed{E}: 3$

---

3. Il numero di minimi locali della funzione $f(x) = \begin{cases} 4x^2 & x \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Z} \\ x^4 & x\in\mathbf{Z}\end{cases}$ è

$\boxed{\bullet}: 3$ $\boxed{B}: 0$ $\boxed{C}: \infty$ $\boxed{D}: 5$ $\boxed{E}: 2$

---

4. Il dominio della funzione $f(x) = \log(1-\sin(\cos x))$ è
$\boxed{\bullet}: \mathbf{R}$ $\boxed{B}: [-1,1]$ $\boxed{C}: \mathbf{R}\setminus\{0\}$ $\boxed{D}: (-\infty,1)$ $\boxed{E}: (0,+\infty)$

---

5. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+3x}+\sqrt[3]{1-3x}-2}{\sqrt[2]{1+8x}+\sqrt[2]{1-8x}-2} =$ $\boxed{A}: \frac{3}{8}$ $\boxed{B}: -1$ $\boxed{\bullet}: \frac{1}{8}$ $\boxed{D}: \frac{3}{16}$ $\boxed{E}: 0$

---

6. L'estremo inferiore dell'insieme $\left\{\log\left|\dfrac{1+5x}{1-11x}\right| : x > \dfrac{1}{11}\right\}$
$\boxed{A}: \log 11$ $\boxed{\bullet}: \log 5 - \log 11$ $\boxed{C}: \log 5$ $\boxed{D}: \log 11 - \log 5$ $\boxed{E}: 1$

---

7. La funzione $f(x) = -\arctan|x-\pi|$ è convessa in
$\boxed{A}: [3,7]$ $\boxed{B}: [2,6]$ $\boxed{C}: [1,5]$ $\boxed{\bullet}: [4,8]$ $\boxed{E}: [0,4]$

---

8. La derivata sinistra di $f(x) = 6\sqrt{\sin x^2} + 5\sqrt{\cos x^2}$ in 0 vale
$\boxed{A}: 6$ $\boxed{B}: 11$ $\boxed{\bullet}: -6$ $\boxed{D}: 5$ $\boxed{E}: -5$

---

9. Il polinomio di Taylor di ordine 4 e centro $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = (x-4)\log(e^x - x)$ è
$\boxed{A}: -2x^2 + \frac{1}{6}x^3$ $\boxed{B}: -2x^2 - \frac{7}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^4$ $\boxed{\bullet}: -2x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^4$
$\boxed{D}: -2x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4$ $\boxed{E}: -2x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{7}{12}x^4$

---

10. L'asintoto della funzione $\log(5^x + 11x - 6)$ per $x \to +\infty$ è
$\boxed{A}: y = (\log 5)x - \log 6$ $\boxed{\bullet}: y = (\log 5)x$ $\boxed{C}: y = 11x - 6$ $\boxed{D}: y = 5x + 11$ $\boxed{E}: y = (\log 6)x$

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E	E	E

Cognome e nome: |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|

Analisi Matematica I (Ingegneria Informatica) Corso: Braides Tauraso
Primo Appello (29/11/2001)
Risposta esatta: 3 punti, errata: -0.5 punti, vuota: 0 punti.

---

1. La funzione $f(x) = (x-2)|x^2-2|$ ha un punto di flesso in
A : 2 B : $-\frac{2}{3}$ C : $\sqrt{3}$ D : 3 ● : $\sqrt{2}$

---

2. Il polinomio di Taylor di ordine 4 e centro $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = (x-5)\log(e^x - x)$ è
A : $-\frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4$ B : $-\frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4$ C : $-\frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$
D : $-\frac{5}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4$ ● : $-\frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{12}x^4$

---

3. L'estremo inferiore dell'insieme $\left\{\log\left|\frac{1+2x}{1-14x}\right| : x > \frac{1}{14}\right\}$
A : $\log 14 - \log 2$ ● : $\log 2 - \log 14$ C : 1 D : $\log 2$ E : $\log 14$

---

4. $\lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{\pi}{2} - \arctan 4x\right)^x =$ A : e^4 B : $e^{1/5}$ C : e^5 D : e ● : $e^{1/4}$

---

5. La derivata sinistra di $f(x) = 7\sqrt{\sin x^2} + 4\sqrt{\cos x^2}$ in 0 vale
A : -4 B : 11 ● : -7 D : 4 E : 7

---

6. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+6x}+\sqrt[3]{1-6x}-2}{\sqrt[2]{1+14x}+\sqrt[2]{1-14x}-2} =$ A : 0 B : -1 C : $\frac{3}{7}$ D : $\frac{12}{49}$ ● : $\frac{8}{49}$

---

7. Il numero di minimi locali della funzione $f(x) = \begin{cases} 9x^2 & x \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Z} \\ x^4 & x \in \mathbf{Z} \end{cases}$ è
A : 0 B : ∞ C : 7 ● : 5 E : 3

---

8. L'asintoto della funzione $\log(4^x + 9x - 5)$ per $x \to +\infty$ è
A : $y = (\log 4)x - \log 5$ ● : $y = (\log 4)x$ C : $y = 9x - 5$ D : $y = 4x + 9$ E : $y = (\log 5)x$

---

9. La funzione $f(x) = -\arctan|x - \pi|$ è convessa in
A : $[3,7]$ B : $[2,6]$ C : $[1,5]$ ● : $[4,8]$ E : $[0,4]$

---

10. Il dominio della funzione $f(x) = \log(1 - \sin(\cos x))$ è
● : $\mathbf{R}$ B : $[-1,1]$ C : $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ D : $(-\infty,1)$ E : $(0,+\infty)$

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E	E	E

Cognome e nome: |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|

Analisi Matematica I (Ingegneria Informatica) Corso: $\boxed{\text{Braides}}$ $\boxed{\text{Tauraso}}$
Primo Appello (29/11/2001)
Risposta esatta: 3 punti, errata: -0.5 punti, vuota: 0 punti.

---

1. Il dominio della funzione $f(x) = \log(1 - \sin(\cos x))$ è
$\boxed{A}$: $[-1, 1]$ $\boxed{B}$: $(-\infty, 1)$ $\boxed{C}$: $(0, +\infty)$ ● : $\mathbf{R}$ $\boxed{E}$: $\mathbf{R} \setminus \{0\}$

---

2. Il numero di minimi locali della funzione $f(x) = \begin{cases} 4x^2 & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z} \\ x^4 & x \in \mathbf{Z} \end{cases}$ è

● : 3 $\boxed{B}$: 0 $\boxed{C}$: ∞ $\boxed{D}$: 5 $\boxed{E}$: 2

---

3. $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{\pi}{2} - \arctan 3x\right)^x =$ $\boxed{A}$: $e^{1/4}$ $\boxed{B}$: e^4 ● : $e^{1/3}$ $\boxed{D}$: e^3 $\boxed{E}$: e

---

4. Il polinomio di Taylor di ordine 4 e centro $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = (x - 6)\log(e^x - x)$ è
$\boxed{A}$: $-3x^2 + \frac{1}{2}x^3$ $\boxed{B}$: $-3x^2 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^4$ ● : $-3x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{2}{3}x^4$
$\boxed{D}$: $-3x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4$ $\boxed{E}$: $-3x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^4$

---

5. La funzione $f(x) = -\arctan|x - \pi|$ è convessa in
$\boxed{A}$: $[0, 4]$ $\boxed{B}$: $[2, 6]$ $\boxed{C}$: $[3, 7]$ ● : $[4, 8]$ $\boxed{E}$: $[1, 5]$

---

6. $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1 + 9x} + \sqrt[3]{1 - 9x} - 2}{\sqrt[2]{1 + 20x} + \sqrt[2]{1 - 20x} - 2} =$ $\boxed{A}$: 0 $\boxed{B}$: -1 $\boxed{C}$: $\frac{9}{20}$ $\boxed{D}$: $\frac{27}{100}$ ● : $\frac{9}{50}$

---

7. La funzione $f(x) = (x - 3)|x^2 - 3|$ ha un punto di flesso in
$\boxed{A}$: -1 $\boxed{B}$: 2 ● : $\sqrt{3}$ $\boxed{D}$: $\sqrt{2}$ $\boxed{E}$: 3

---

8. L'asintoto della funzione $\log(3^x + 7x - 4)$ per $x \to +\infty$ è
● : $y = (\log 3)x$ $\boxed{B}$: $y = 7x - 4$ $\boxed{C}$: $y = (\log 3)x - \log 4$ $\boxed{D}$: $y = 3x + 7$ $\boxed{E}$: $y = (\log 4)x$

---

9. La derivata sinistra di $f(x) = 8\sqrt{\sin x^2} + 3\sqrt{\cos x^2}$ in 0 vale
$\boxed{A}$: 8 ● : -8 $\boxed{C}$: 11 $\boxed{D}$: -3 $\boxed{E}$: 3

---

10. L'estremo inferiore dell'insieme $\left\{\log\left|\frac{1 + 3x}{1 - 13x}\right| : x > \frac{1}{13}\right\}$
$\boxed{A}$: $\log 13$ ● : $\log 3 - \log 13$ $\boxed{C}$: $\log 3$ $\boxed{D}$: $\log 13 - \log 3$ $\boxed{E}$: 1

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E	E	E

Cognome e nome: |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|

Analisi Matematica I (Ingegneria Informatica) Corso: Braides Tauraso
Primo Appello (29/11/2001)
Risposta esatta: 3 punti, errata: -0.5 punti, vuota: 0 punti.

---

1. Il numero di minimi locali della funzione $f(x) = \begin{cases} 9x^2 & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z} \\ x^4 & x \in \mathbf{Z} \end{cases}$ è

A : ∞ B : 0 ● : 5 D : 7 E : 3

---

2. La funzione $f(x) = -\arctan|x - \pi|$ è convessa in

● : $[4, 8]$ B : $[1, 5]$ C : $[3, 7]$ D : $[2, 6]$ E : $[0, 4]$

---

3. La funzione $f(x) = (x - 2)|x^2 - 2|$ ha un punto di flesso in

● : $\sqrt{2}$ B : $-\frac{2}{3}$ C : 3 D : 2 E : $\sqrt{3}$

---

4. L'estremo inferiore dell'insieme $\left\{\log\left|\dfrac{1+4x}{1-12x}\right| : x > \dfrac{1}{12}\right\}$

A : $\log 12 - \log 4$ ● : $\log 4 - \log 12$ C : 1 D : $\log 4$ E : $\log 12$

---

5. $\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{\pi}{2} - \arctan 2x\right)^x =$ A : e B : $e^{1/3}$ ● : $e^{1/2}$ D : e^2 E : e^3

---

6. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+3x} + \sqrt[3]{1-3x} - 2}{\sqrt[2]{1+8x} + \sqrt[2]{1-8x} - 2} =$ A : $\frac{3}{8}$ B : -1 ● : $\frac{1}{8}$ D : $\frac{3}{16}$ E : 0

---

7. L'asintoto della funzione $\log(2^x + 5x - 3)$ per $x \to +\infty$ è

A : $y = (\log 3)x$ B : $y = (\log 2)x - \log 3$ ● : $y = (\log 2)x$ D : $y = 5x - 3$ E : $y = 2x + 5$

---

8. Il dominio della funzione $f(x) = \log(1 - \sin(\cos x))$ è

A : $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ B : $(-\infty, 1)$ C : $(0, +\infty)$ ● : $\mathbf{R}$ E : $[-1, 1]$

---

9. Il polinomio di Taylor di ordine 4 e centro $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = (x - 4)\log(e^x - x)$ è

A : $-2x^2 - \frac{7}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^4$ ● : $-2x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^4$ C : $-2x^2 + \frac{1}{6}x^3$

D : $-2x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{7}{12}x^4$ E : $-2x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4$

---

10. La derivata sinistra di $f(x) = 9\sqrt{\sin x^2} + 2\sqrt{\cos x^2}$ in 0 vale

A : 9 ● : -9 C : 11 D : -2 E : 2

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E	E	E

Cognome e nome: $\sqcup\!\sqcup$

Analisi Matematica I (Ingegneria Informatica) Corso: $\boxed{\text{Braides}}$ $\boxed{\text{Tauraso}}$
Secondo Appello (6/12/2001)
Risposta esatta: 3 punti, errata: -0.5 punti, vuota: 0 punti.

---

1. Il polinomio di Taylor di ordine 3 e centro $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = (2x+5)\sqrt{1+\sin x}$ è
$\boxed{A}: 5 + \frac{9}{2}x + \frac{17}{6}x^3$ $\boxed{B}: 5 + \frac{9}{8}x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{17}{48}x^3$ $\boxed{●}: 5 + \frac{9}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{17}{48}x^3$
$\boxed{D}: 5 + \frac{9}{2}x - \frac{3}{8}x^2$ $\boxed{E}: 5 + \frac{9}{2}x + \frac{17}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$

---

2. L'estremo superiore dell'insieme $\left\{3^x \ : x < \dfrac{1}{\log 3}\right\}$ è

$\boxed{A}: 9$ $\boxed{●}: e$ $\boxed{C}: \log 3$ $\boxed{D}: +\infty$ $\boxed{E}: 1$

---

3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{7\,e^{x+\sin x} + 8}{15\,e^x + 22} =$ $\boxed{A}: 1$ $\boxed{B}: +\infty$ $\boxed{C}: \frac{7}{15}$ $\boxed{D}: \frac{4}{11}$ $\boxed{●}:$ non esiste

---

4. La derivata sinistra di $f(x) = 4\sqrt{\sin x^2} + 7\sqrt{\tan x^2}$ in 0 vale
$\boxed{A}: -7$ $\boxed{●}: -11$ $\boxed{C}: -4$ $\boxed{D}: 7$ $\boxed{E}: 4$

---

5. $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{(2x+5)\sqrt{1+\sin x} - 5e^x - 2x}{\log(\cos^2 x)} =$ $\boxed{●}: +\infty$ $\boxed{B}: \frac{5}{4}$ $\boxed{C}: \frac{13}{2}$ $\boxed{D}: -\frac{13}{2}$ $\boxed{E}: 0$

---

6. Il numero di massimi locali della funzione $f(x) = \begin{cases} |x| & x \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Z} \\ \sin x & x \in \mathbf{Z} \end{cases}$ è

$\boxed{A}: 1$ $\boxed{B}: \infty$ $\boxed{C}: 3$ $\boxed{D}: 2$ $\boxed{●}: 0$

---

7. La retta tangente in $x = e$ al grafico della funzione $x^{\log x}$ è
$\boxed{A}: y = -x + 2e$ $\boxed{B}: y = 4x - 3e$ $\boxed{C}: y = 3x - 2e$ $\boxed{●}: y = 2x - e$ $\boxed{E}: y = 2ex - e$

---

8. La funzione $f(x) = (x-2)(x-3)(x-4)$ è convessa in
$\boxed{A}: [2,3]$ $\boxed{●}: [3,4]$ $\boxed{C}: [2,4]$ $\boxed{D}: [-2,0]$ $\boxed{E}: [0,2]$

---

9. Il dominio della funzione $f(x) = \log(\log(\sin x))$ è
$\boxed{A}: \mathbf{R}$ $\boxed{B}: [-1,1]$ $\boxed{C}: \mathbf{R}\setminus\{0\}$ $\boxed{●}: \emptyset$ $\boxed{E}: \mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}$

---

10. La funzione $f(x) = \sqrt[3]{x^2}(x-1)$ ha un punto di minimo relativo in
$\boxed{A}: 0$ $\boxed{●}: \frac{2}{5}$ $\boxed{C}: -3$ $\boxed{D}: \frac{5}{3}$ $\boxed{E}: \frac{2}{3}$

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E	E	E

Cognome e nome: $\sqcup$

Analisi Matematica I (Ingegneria Informatica) Corso: $\boxed{\text{Braides}}$ $\boxed{\text{Tauraso}}$
Secondo Appello (6/12/2001)
Risposta esatta: 3 punti, errata: -0.5 punti, vuota: 0 punti.

---

1. Il polinomio di Taylor di ordine 3 e centro $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = (2x+3)\sqrt{1+\sin x}$ è
$\boxed{A}: 3 + \frac{7}{2}x - \frac{5}{8}x^2$ $\boxed{B}: 3 + \frac{7}{2}x + \frac{5}{2}x^3$ $\boxed{C}: 3 + \frac{7}{2}x + \frac{15}{8}x^2 + \frac{5}{48}x^3$
$\boxed{\bullet}: 3 + \frac{7}{2}x + \frac{5}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3$ $\boxed{E}: 3 + \frac{7}{8}x + \frac{5}{2}x^2 - \frac{5}{16}x^3$

---

2. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(2x+3)\sqrt{1+\sin x} - 3e^x - 2x}{\log(\cos^2 x)} =$ $\boxed{\bullet}: +\infty$ $\boxed{B}: \frac{9}{2}$ $\boxed{C}: -\frac{9}{2}$ $\boxed{D}: \frac{3}{4}$ $\boxed{E}: 0$

---

3. La funzione $f(x) = \sqrt[3]{x^2}(x-1)$ ha un punto di minimo relativo in
$\boxed{\bullet}: \frac{2}{5}$ $\boxed{B}: -3$ $\boxed{C}: 0$ $\boxed{D}: \frac{5}{3}$ $\boxed{E}: \frac{2}{3}$

---

4. La derivata sinistra di $f(x) = 5\sqrt{\sin x^2} + 6\sqrt{\tan x^2}$ in 0 vale
$\boxed{A}: 5$ $\boxed{B}: -5$ $\boxed{\bullet}: -11$ $\boxed{D}: -6$ $\boxed{E}: 6$

---

5. Il dominio della funzione $f(x) = \log(\log(\sin x))$ è
$\boxed{\bullet}: \emptyset$ $\boxed{B}: \mathbf{R} \setminus \{0\}$ $\boxed{C}: \mathbf{R}$ $\boxed{D}: \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$ $\boxed{E}: [-1, 1]$

---

6. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{6\, e^{x+\sin x} + 7}{13\, e^x + 19} =$ $\boxed{A}: +\infty$ $\boxed{B}: \frac{6}{13}$ $\boxed{C}: \frac{7}{19}$ $\boxed{\bullet}$: non esiste $\boxed{E}: 1$

---

7. La funzione $f(x) = (x-3)(x-4)(x-5)$ è convessa in
$\boxed{A}: [0, 3]$ $\boxed{B}: [3, 4]$ $\boxed{\bullet}: [4, 5]$ $\boxed{D}: [3, 5]$ $\boxed{E}: [-3, 0]$

---

8. La retta tangente in $x = e$ al grafico della funzione $x^{\log x}$ è
$\boxed{A}: y = 3x - 2e$ $\boxed{\bullet}: y = 2x - e$ $\boxed{C}: y = 2ex - e$ $\boxed{D}: y = -x + 2e$ $\boxed{E}: y = 4x - 3e$

---

9. L'estremo superiore dell'insieme $\left\{ 4^x \; : x < \dfrac{1}{\log 4} \right\}$ è
$\boxed{A}: +\infty$ $\boxed{\bullet}: e$ $\boxed{C}: 1$ $\boxed{D}: \log 4$ $\boxed{E}: 16$

---

10. Il numero di massimi locali della funzione $f(x) = \begin{cases} |x| & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z} \\ \sin x & x \in \mathbf{Z} \end{cases}$ è
$\boxed{A}: 1$ $\boxed{B}: \infty$ $\boxed{C}: 4$ $\boxed{D}: 3$ $\boxed{\bullet}: 0$

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E	E	E

Cognome e nome: $\sqcup$

Analisi Matematica I (Ingegneria Informatica) Corso: $\boxed{\text{Braides}}$ $\boxed{\text{Tauraso}}$
Secondo Appello (6/12/2001)
Risposta esatta: 3 punti, errata: -0.5 punti, vuota: 0 punti.

---

1. Il polinomio di Taylor di ordine 3 e centro $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = (2x+5)\sqrt{1+\sin x}$ è
$\boxed{A}$: $5 + \frac{9}{2}x + \frac{17}{6}x^3$ $\boxed{B}$: $5 + \frac{9}{8}x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{17}{48}x^3$ ● : $5 + \frac{9}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{17}{48}x^3$
$\boxed{D}$: $5 + \frac{9}{2}x - \frac{3}{8}x^2$ $\boxed{E}$: $5 + \frac{9}{2}x + \frac{17}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$

---

2. La retta tangente in $x = e$ al grafico della funzione $x^{\log x}$ è
$\boxed{A}$: $y = 4x - 3e$ $\boxed{B}$: $y = 3x - 2e$ ● : $y = 2x - e$ $\boxed{D}$: $y = 2ex - e$ $\boxed{E}$: $y = -x + 2e$

---

3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{5\,e^{x+\sin x} + 6}{11\,e^x + 16} =$ $\boxed{A}$: $\frac{3}{8}$ $\boxed{B}$: 1 $\boxed{C}$: $+\infty$ ● : non esiste $\boxed{E}$: $\frac{5}{11}$

---

4. La funzione $f(x) = \sqrt[3]{x^2}(x-1)$ ha un punto di minimo relativo in
$\boxed{A}$: -3 $\boxed{B}$: 0 ● : $\frac{2}{5}$ $\boxed{D}$: $\frac{2}{3}$ $\boxed{E}$: $\frac{5}{3}$

---

5. Il numero di massimi locali della funzione $f(x) = \begin{cases} |x| & x \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Z} \\ \sin x & x \in \mathbf{Z} \end{cases}$ è
$\boxed{A}$: 5 $\boxed{B}$: 4 $\boxed{C}$: ∞ $\boxed{D}$: 1 ● : 0

---

6. Il dominio della funzione $f(x) = \log(\log(\sin x))$ è
$\boxed{A}$: $[-1, 1]$ ● : $\emptyset$ $\boxed{C}$: $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}$ $\boxed{D}$: $\mathbf{R}$ $\boxed{E}$: $\mathbf{R}\setminus\{0\}$

---

7. $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{(2x+5)\sqrt{1+\sin x} - 5e^x - 2x}{\log(\cos^2 x)} =$ $\boxed{A}$: $-\frac{13}{2}$ $\boxed{B}$: 0 $\boxed{C}$: $\frac{5}{4}$ ● : $+\infty$ $\boxed{E}$: $\frac{13}{2}$

---

8. L'estremo superiore dell'insieme $\left\{5^x \ : x < \dfrac{1}{\log 5}\right\}$ è
$\boxed{A}$: $+\infty$ ● : e $\boxed{C}$: 1 $\boxed{D}$: $\log 5$ $\boxed{E}$: 25

---

9. La funzione $f(x) = (x-4)(x-5)(x-6)$ è convessa in
$\boxed{A}$: $[0, 4]$ $\boxed{B}$: $[4, 5]$ ● : $[5, 6]$ $\boxed{D}$: $[4, 6]$ $\boxed{E}$: $[-4, 0]$

---

10. La derivata sinistra di $f(x) = 6\sqrt{\sin x^2} + 5\sqrt{\tan x^2}$ in 0 vale
$\boxed{A}$: 6 $\boxed{B}$: -6 ● : -11 $\boxed{D}$: -5 $\boxed{E}$: 5

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E	E	E

Cognome e nome: $\underline{\quad}$

Analisi Matematica I (Ingegneria Informatica) Corso: $\boxed{\text{Braides}}$ $\boxed{\text{Tauraso}}$
Secondo Appello (6/12/2001)
Risposta esatta: 3 punti, errata: -0.5 punti, vuota: 0 punti.

---

1. Il polinomio di Taylor di ordine 3 e centro $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = (2x+3)\sqrt{1+\sin x}$ è
$\boxed{\text{A}}$: $3 + \frac{7}{2}x + \frac{15}{8}x^2 + \frac{5}{48}x^3$ $\boxed{\bullet}$: $3 + \frac{7}{2}x + \frac{5}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3$ $\boxed{\text{C}}$: $3 + \frac{7}{8}x + \frac{5}{2}x^2 - \frac{5}{16}x^3$
$\boxed{\text{D}}$: $3 + \frac{7}{2}x - \frac{5}{8}x^2$ $\boxed{\text{E}}$: $3 + \frac{7}{2}x + \frac{5}{2}x^3$

---

2. L'estremo superiore dell'insieme $\left\{2^x \ : x < \dfrac{1}{\log 2}\right\}$ è

$\boxed{\text{A}}$: 4 $\boxed{\bullet}$: e $\boxed{\text{C}}$: $\log 2$ $\boxed{\text{D}}$: $+\infty$ $\boxed{\text{E}}$: 1

---

3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{4\,e^{x+\sin x}+5}{9\,e^x+13} =$ $\boxed{\text{A}}$: $+\infty$ $\boxed{\bullet}$: non esiste $\boxed{\text{C}}$: $\frac{4}{9}$ $\boxed{\text{D}}$: 1 $\boxed{\text{E}}$: $\frac{5}{13}$

---

4. La derivata sinistra di $f(x) = 7\sqrt{\sin x^2} + 4\sqrt{\tan x^2}$ in 0 vale
$\boxed{\text{A}}$: 4 $\boxed{\bullet}$: -11 $\boxed{\text{C}}$: -7 $\boxed{\text{D}}$: -4 $\boxed{\text{E}}$: 7

---

5. $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{(2x+3)\sqrt{1+\sin x} - 3e^x - 2x}{\log(\cos^2 x)} =$ $\boxed{\bullet}$: $+\infty$ $\boxed{\text{B}}$: $\frac{9}{2}$ $\boxed{\text{C}}$: $-\frac{9}{2}$ $\boxed{\text{D}}$: $\frac{3}{4}$ $\boxed{\text{E}}$: 0

---

6. Il numero di massimi locali della funzione $f(x) = \begin{cases} |x| & x \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Z} \\ \sin x & x \in \mathbf{Z} \end{cases}$ è

$\boxed{\text{A}}$: 1 $\boxed{\text{B}}$: ∞ $\boxed{\text{C}}$: 6 $\boxed{\text{D}}$: 5 $\boxed{\bullet}$: 0

---

7. La retta tangente in $x = e$ al grafico della funzione $x^{\log x}$ è
$\boxed{\text{A}}$: $y = 4x - 3e$ $\boxed{\text{B}}$: $y = 3x - 2e$ $\boxed{\text{C}}$: $y = -x + 2e$ $\boxed{\text{D}}$: $y = 2ex - e$ $\boxed{\bullet}$: $y = 2x - e$

---

8. La funzione $f(x) = (x-5)(x-6)(x-7)$ è convessa in
$\boxed{\text{A}}$: $[-5, 0]$ $\boxed{\text{B}}$: $[5, 6]$ $\boxed{\text{C}}$: $[5, 7]$ $\boxed{\text{D}}$: $[0, 5]$ $\boxed{\bullet}$: $[6, 7]$

---

9. Il dominio della funzione $f(x) = \log(\log(\sin x))$ è
$\boxed{\text{A}}$: $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ $\boxed{\bullet}$: $\emptyset$ $\boxed{\text{C}}$: $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}$ $\boxed{\text{D}}$: $\mathbf{R}$ $\boxed{\text{E}}$: $[-1, 1]$

---

10. La funzione $f(x) = \sqrt[3]{x^2}(x-1)$ ha un punto di minimo relativo in
$\boxed{\text{A}}$: $\frac{5}{3}$ $\boxed{\text{B}}$: -3 $\boxed{\text{C}}$: $\frac{2}{3}$ $\boxed{\text{D}}$: 0 $\boxed{\bullet}$: $\frac{2}{5}$

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E	E	E

Cognome e nome: |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|

Analisi Matematica I (Ingegneria Informatica) Corso: $\boxed{\text{Braides}}$ $\boxed{\text{Tauraso}}$
Secondo Appello (6/12/2001)
Risposta esatta: 3 punti, errata: -0.5 punti, vuota: 0 punti.

---

1. Il polinomio di Taylor di ordine 3 e centro $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = (2x+5)\sqrt{1+\sin x}$ è
$\boxed{A}$: $5 + \frac{9}{2}x - \frac{3}{8}x^2$ $\boxed{B}$: $5 + \frac{9}{2}x + \frac{17}{6}x^3$ $\boxed{C}$: $5 + \frac{9}{2}x + \frac{17}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$
$\boxed{\bullet}$: $5 + \frac{9}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{17}{48}x^3$ $\boxed{E}$: $5 + \frac{9}{8}x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{17}{48}x^3$

---

2. La funzione $f(x) = (x-6)(x-7)(x-8)$ è convessa in
$\boxed{A}$: $[6,8]$ $\boxed{B}$: $[6,7]$ $\boxed{\bullet}$: $[7,8]$ $\boxed{D}$: $[0,6]$ $\boxed{E}$: $[-6,0]$

---

3. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{(2x+5)\sqrt{1+\sin x} - 5e^x - 2x}{\log(\cos^2 x)} =$ $\boxed{\bullet}$: $+\infty$ $\boxed{B}$: $-\frac{13}{2}$ $\boxed{C}$: 0 $\boxed{D}$: $\frac{13}{2}$ $\boxed{E}$: $\frac{5}{4}$

---

4. La funzione $f(x) = \sqrt[3]{x^2}(x-1)$ ha un punto di minimo relativo in
$\boxed{A}$: 0 $\boxed{\bullet}$: $\frac{2}{5}$ $\boxed{C}$: -3 $\boxed{D}$: $\frac{5}{3}$ $\boxed{E}$: $\frac{2}{3}$

---

5. La retta tangente in $x = e$ al grafico della funzione $x^{\log x}$ è
$\boxed{A}$: $y = 4x - 3e$ $\boxed{B}$: $y = 3x - 2e$ $\boxed{\bullet}$: $y = 2x - e$ $\boxed{D}$: $y = 2ex - e$ $\boxed{E}$: $y = -x + 2e$

---

6. La derivata sinistra di $f(x) = 8\sqrt{\sin x^2} + 3\sqrt{\tan x^2}$ in 0 vale
$\boxed{A}$: 3 $\boxed{\bullet}$: -11 $\boxed{C}$: -8 $\boxed{D}$: -3 $\boxed{E}$: 8

---

7. L'estremo superiore dell'insieme $\left\{3^x \;:\; x < \dfrac{1}{\log 3}\right\}$ è
$\boxed{A}$: $+\infty$ $\boxed{\bullet}$: e $\boxed{C}$: 1 $\boxed{D}$: $\log 3$ $\boxed{E}$: 9

---

8. Il dominio della funzione $f(x) = \log(\log(\sin x))$ è
$\boxed{A}$: $\mathbf{R}$ $\boxed{B}$: $[-1,1]$ $\boxed{C}$: $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ $\boxed{\bullet}$: $\emptyset$ $\boxed{E}$: $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}$

---

9. Il numero di massimi locali della funzione $f(x) = \begin{cases} |x| & x \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Z} \\ \sin x & x \in \mathbf{Z} \end{cases}$ è
$\boxed{A}$: ∞ $\boxed{\bullet}$: 0 $\boxed{C}$: 6 $\boxed{D}$: 1 $\boxed{E}$: 7

---

10. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3\,e^{x+\sin x} + 4}{7\,e^x + 10} =$ $\boxed{A}$: $+\infty$ $\boxed{B}$: $\frac{3}{7}$ $\boxed{C}$: $\frac{2}{5}$ $\boxed{\bullet}$: non esiste $\boxed{E}$: 1

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E	E	E

Cognome e nome: |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|

Analisi Matematica I (Ingegneria Informatica) Corso: Braides Tauraso
Secondo Appello (6/12/2001)
Risposta esatta: 3 punti, errata: -0.5 punti, vuota: 0 punti.

---

1. Il polinomio di Taylor di ordine 3 e centro $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = (2x+3)\sqrt{1+\sin x}$ è
A : $3 + \frac{7}{2}x + \frac{5}{2}x^3$ B : $3 + \frac{7}{8}x + \frac{5}{2}x^2 - \frac{5}{16}x^3$ ● : $3 + \frac{7}{2}x + \frac{5}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3$
D : $3 + \frac{7}{2}x - \frac{5}{8}x^2$ E : $3 + \frac{7}{2}x + \frac{15}{8}x^2 + \frac{5}{48}x^3$

---

2. La derivata sinistra di $f(x) = 9\sqrt{\sin x^2} + 2\sqrt{\tan x^2}$ in 0 vale
A : 2   ● : -11 C : -9 D : -2 E : 9

---

3. Il numero di massimi locali della funzione $f(x) = \begin{cases} |x| & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z} \\ \sin x & x \in \mathbf{Z} \end{cases}$ è
● : 0   B : ∞ C : 1   D : 7   E : 8

---

4. La funzione $f(x) = (x-7)(x-8)(x-9)$ è convessa in
A : $[0,7]$ B : $[7,8]$ ● : $[8,9]$ D : $[7,9]$ E : $[-7,0]$

---

5. La funzione $f(x) = \sqrt[3]{x^2}(x-1)$ ha un punto di minimo relativo in
A : 0   ● : $\frac{2}{5}$ C : -3 D : $\frac{5}{3}$ E : $\frac{2}{3}$

---

6. L'estremo superiore dell'insieme $\left\{4^x \ : x < \dfrac{1}{\log 4}\right\}$ è
A : 16   ● : e C : $\log 4$ D : $+\infty$ E : 1

---

7. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2\,e^{x+\sin x}+3}{5\,e^x+7} =$ A : $\frac{3}{7}$ B : 1   C : $+\infty$ ● : non esiste   E : $\frac{2}{5}$

---

8. $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{(2x+3)\sqrt{1+\sin x} - 3e^x - 2x}{\log(\cos^2 x)} =$ ● : $+\infty$ B : $-\frac{9}{2}$ C : 0   D : $\frac{9}{2}$ E : $\frac{3}{4}$

---

9. La retta tangente in $x = e$ al grafico della funzione $x^{\log x}$ è
● : $y = 2x - e$ B : $y = 2ex - e$ C : $y = 3x - 2e$ D : $y = -x + 2e$ E : $y = 4x - 3e$

---

10. Il dominio della funzione $f(x) = \log(\log(\sin x))$ è
A : $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$ B : $[-1,1]$ C : $\mathbf{R}$ D : $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ ● : $\emptyset$

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E	E	E

ANALISI MATEMATICA I **Ingegneria Informatica (Braides & Tauraso)**
Appello del 13 settembre 2002 Risposta esatta: 3, errata: -0.5, vuota: 0 punti

---

1. Il polinomio di Taylor di centro 0 e ordine 5 della funzione $f(x) = 4\log(1 + x^2) - 2x\sin(2x)$ è
$\boxed{A}$: $x^2 - x^4$ $\boxed{B}$: $\frac{2}{3}x^4$ $\boxed{C}$: $x^3 + \frac{2}{3}x^4$ $\boxed{D}$: $6x^4$ $\boxed{E}$: $x^2 - 6x^4$

---

2. Il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{(1+x)^{\frac{\log(1+x)}{x}} - (1+x)^2}{x^\alpha}$ è un numero reale non nullo $\boxed{A}$: per $\alpha = 0$ $\boxed{B}$: per $\alpha = 1$ $\boxed{C}$: per $\alpha = 2$ $\boxed{D}$: per tutti i valori di α $\boxed{E}$: per nessun valore di α

---

3. Il limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \Big(\log(x+3) - \log(2+x)\Big)^{\frac{4}{\log x}}$ vale $\boxed{A}$: e^{-4} $\boxed{B}$: e^3 $\boxed{C}$: e^{-2} $\boxed{D}$: 0 $\boxed{E}$: 1

---

4. Posto $f(0) = 0$, la derivata destra della funzione $f(x) = \dfrac{\sqrt{x + 4x^2} - \sqrt{\sin x}}{\sqrt{x}}$ in 0 vale

$\boxed{A}$: 2 $\boxed{B}$: 0 $\boxed{C}$: $+\infty$ $\boxed{D}$: 4 $\boxed{E}$: 1

---

5. L'estremo inferiore dell'insieme $\left\{\log\left(7 + \left|\frac{3}{x} - e^{x^2}\right|\right) : x > 0\right\}$ vale

$\boxed{A}$: $\log 4$ $\boxed{B}$: $\log 10$ $\boxed{C}$: $\log 7$ $\boxed{D}$: $-\infty$ $\boxed{E}$: 0

---

6. Il numero dei minimi locali della funzione $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{se } x \notin \mathbf{Z} \\ |x| - 1 & \text{se } x \in \mathbf{Z} \end{cases}$ è

$\boxed{A}$: 1 $\boxed{B}$: 2 $\boxed{C}$: 3 $\boxed{D}$: 5 $\boxed{E}$: $+\infty$

---

7. Il numero di punti di non derivabilità della funzione $f(x) = |\sin x|\,|x + x^2|$ nell'intervallo $[-2, 2]$ è $\boxed{A}$: 1 $\boxed{B}$: 2 $\boxed{C}$: 3 $\boxed{D}$: 4 $\boxed{E}$: 5

---

8. Il dominio della funzione $f(x) = |1 - (\log|\log|\sin x||)|$ è
$\boxed{A}$: $\mathbf{R}$ $\boxed{B}$: $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}$ $\boxed{C}$: $\mathbf{R}\setminus\{\mathbf{k}\frac{\pi}{\mathbf{2}} : \mathbf{k} \in \mathbf{Z}\}$ $\boxed{D}$: $\mathbf{R}\setminus\{\mathbf{k}\pi : \mathbf{k} \in \mathbf{Z}\}$ $\boxed{E}$: $\mathbf{R}\setminus\{\frac{(\mathbf{2k+1})\pi}{\mathbf{2}} : \mathbf{k} \in \mathbf{Z}\}$

---

9. La funzione $g(x) = \log(x + 1) + |\log|x - 3||$ è convessa in
$\boxed{A}$: $(0, 1)$ $\boxed{B}$: $(1, 3)$ $\boxed{C}$: $(2, 3)$ $\boxed{D}$: $(2, 4)$ $\boxed{E}$: $(3, 5)$

---

10. La retta tangente al grafico della funzione g dell'esercizio precedente in $x = 0$ è
$\boxed{A}$: $y = \frac{2}{3}x - \log 3$ $\boxed{B}$: $y = \frac{4}{3}x$ $\boxed{C}$: $y = \frac{2}{3}x + \log 3$ $\boxed{D}$: $y = x + \log 3$ $\boxed{E}$: $y = \frac{4}{3}x + \log 3$

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
B	B	A	A	C	A	A	C	C	C

Cognome e nome: ....

ANALISI MATEMATICA I (Braides & Tauraso) **Ingegneria informatica**

Appello del 20 settembre 2002 Risposta esatta: 3, errata: -0.5, vuota: 0 punti

---

1. Il polinomio di Taylor di centro 0 e ordine 5 della funzione $f(x) = 3x\cos(2x) + 6\log(1+x^3)$ è
$\boxed{\text{A}}$: $3x + 2x^5$ $\boxed{\text{B}}$: $3x - 2x^5$ $\boxed{\text{C}}$: $2x^5 - 3x$ $\boxed{\text{D}}$: $3x + 12x^3 + 2x^5$ $\boxed{\text{E}}$: $3x - 12x^3 + 2x^5$

---

2. Il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{(1+x)^{\frac{\log(1+x)}{x}} - 1 - x}{x^\alpha}$ è un numero reale non nullo $\boxed{\text{A}}$: per $\alpha = 0$ $\boxed{\text{B}}$: per $\alpha = 2$ $\boxed{\text{C}}$: per $\alpha = 1$ $\boxed{\text{D}}$: per tutti i valori di α $\boxed{\text{E}}$: per nessun valore di α

---

3. Il limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x + \sin x}{x^2+1}\right)^{\frac{2}{\log x}}$ vale $\boxed{\text{A}}$: e^{-4} $\boxed{\text{B}}$: e^2 $\boxed{\text{C}}$: e^{-2} $\boxed{\text{D}}$: 0 $\boxed{\text{E}}$: 1

---

4. Posto $f(0) = 0$, la derivata destra della funzione $f(x) = \dfrac{\sqrt{x + 4x^2} - \sqrt{\tan x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{x}}$ in 0 vale

$\boxed{\text{A}}$: 2 $\boxed{\text{B}}$: 0 $\boxed{\text{C}}$: $+\infty$ $\boxed{\text{D}}$: 4 $\boxed{\text{E}}$: 1

---

5. L'estremo inferiore dell'insieme $\left\{\log\left(7 + \left|3 + \frac{5}{x}\right|\right) : x > 0\right\}$ vale

$\boxed{\text{A}}$: $\log 2$ $\boxed{\text{B}}$: $\log 10$ $\boxed{\text{C}}$: $\log 7$ $\boxed{\text{D}}$: $-\infty$ $\boxed{\text{E}}$: 0

---

6. Il numero dei massimi locali della funzione $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \notin \mathbf{Z} \\ 2|x| + x & \text{se } x \in \mathbf{Z} \end{cases}$ è

$\boxed{\text{A}}$: 1 $\boxed{\text{B}}$: 2 $\boxed{\text{C}}$: 3 $\boxed{\text{D}}$: 5 $\boxed{\text{E}}$: $+\infty$

---

7. Il numero di punti di non derivabilità della funzione $f(x) = |\sin x|\sqrt{1 - \cos x}$ nell'intervallo $[-4, 4]$ è $\boxed{\text{A}}$: 0 $\boxed{\text{B}}$: 1 $\boxed{\text{C}}$: 2 $\boxed{\text{D}}$: 3 $\boxed{\text{E}}$: 4

---

8. Il dominio della funzione $f(x) = \log|\log|\tan x||$ è
$\boxed{\text{A}}$: $\mathbf{R}$ $\boxed{\text{B}}$: $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}$ $\boxed{\text{C}}$: $\mathbf{R}\setminus\{k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbf{Z}\}$ $\boxed{\text{D}}$: $\mathbf{R}\setminus\{k\frac{\pi}{4} : k \in \mathbf{Z}\}$ $\boxed{\text{E}}$: $\mathbf{R}\setminus\{\frac{(2k+1)\pi}{4} : k \in \mathbf{Z}\}$

---

9. La funzione $g(x) = \frac{1}{3-x} - |\log|x-3||$ è convessa in
$\boxed{\text{A}}$: $(5, 6)$ $\boxed{\text{B}}$: $(1, 3)$ $\boxed{\text{C}}$: $(3, 4)$ $\boxed{\text{D}}$: $(2, 4)$ $\boxed{\text{E}}$: $(3, 5)$

---

10. La retta tangente al grafico della funzione g dell'esercizio precedente in $x = 0$ è
$\boxed{\text{A}}$: $y = -\frac{2}{9}x + \frac{1}{3} - \log 3$ $\boxed{\text{B}}$: $y = -\frac{4}{9}x + \frac{1}{3} - \log 3$ $\boxed{\text{C}}$: $y = \frac{2}{9}x + \frac{1}{3} + \log 3$ $\boxed{\text{D}}$: $y = \frac{4}{9}x + \frac{1}{3} - \log 3$ $\boxed{\text{E}}$: $y = \frac{4}{9}x + \frac{1}{3} + \log 3$

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
A	**B**	**C**	**E**	**B**	**B**	**C**	**D**	**A**	**D**